RICCI QUARTER-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA SAHİP TANJANT DEMETİN GEOMETRİSİ

Erkan KARAKAŞ

Danışman: Prof. Dr. Aydın GEZER

Doktora Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

2025

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

RICCI QUARTER-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA SAHİP TANJANT DEMETİN GEOMETRİSİ

(Geometry of Tangent Bundle with Ricci Quarter-Symmetric Metric Connection)

DOKTORA TEZİ

Erkan KARAKAŞ

Danışman: Prof. Dr. Aydın GEZER

Erzurum

Ocak, 2025

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Erkan KARAKAŞ tarafından hazırlanan "Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyona Sahip Tanjant Demetin Geometrisi" başlıklı çalışması 15 / 01 / 2025 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Matematik Ana Bilim Dalı, Geometri Bilim Dalı'nda doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı:	Prof. Dr. Yusuf YAYLI	
	Ankara Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır
Danışman:	Prof. Dr. Aydın GEZER	
	Atatürk Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Prof. Dr. Elif BOYDAŞ	
	Atatürk Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Çağrı KARAMAN	
	Atatürk Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır
Jüri Üyesi:	Doç. Dr. Lokman BİLEN	
	Iğdır Üniversitesi	Aslı Islak İmzalıdır

Bu tezin Atatürk Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddelerinde belirtilen şartları yerine getirdiğini onaylarım.

Prof. Dr. Alper NUHOĞLU
Enstitü Müdürü

Aslı Islak İmzalıdır

ETİK BİLDİRİM VE İNTİHAL BEYAN FORMU

Doktora tezi olarak Prof. Dr. Aydın GEZER danışmanlığında sunulan "Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyona Sahip Tanjant Demetin Geometrisi" başlıklı çalışmanın tarafımızdan bilimsel etik ilkelere uyularak yazıldığını, yararlanılan eserlerin kaynakçada gösterildiğini, Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından belirlenmiş olan Turnitin Programı benzerlik oranlarının aşılmadığını ve aşağıdaki oranlarda olduğunu beyan ederiz.

Tez Bölümleri	Tezin Benzerlik Oranı (%)	Maksimum Oran (%)
Giriş	*9*	**30**
Kuramsal Temeller	*22*	**30**
Materyal ve Yöntem	*33*	**35**
Araştırma Bulguları ve Tartışma	*6*	**20**
Sonuç	*4*	**20**
Tezin Geneli	*12*	**25**

Not: *Yedi kelimeye kadar benzerlikler ile Başlık, Kaynakça, İçindekiler, Teşekkür, Dizin ve Ekler kısımları tarama dışı bırakılabilir. Yukarıdaki azami benzerlik oranları yanında tek bir kaynaktan olan benzerlik oranlarının* ***%5'den*** *büyük olmaması gerekir.*

Beyan edilen bilgilerin doğru olduğunu aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Tez Yazarı (Öğrenci)	Tez Danışmanı
Erkan KARAKAŞ	**Prof. Dr. Aydın GEZER**
25.1.2025	**25.1.2025**
İmza: Aslı Islak İmzalıdır	İmza: Aslı Islak İmzalıdır

***** Tez ile ilgili YÖKTEZ'de yayınlamasına ilişkin bir engelleme var ise aşağıdaki alanı doldurunuz.

☐ Tezle ilgili patent başvurusu yapılması / patent alma sürecinin devam etmesi sebebiyle Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve …………. sayılı kararı ile teze erişim 2 (iki) yıl süreyle engellenmiştir.

☐ Enstitü Yönetim Kurulunun …./…/…. tarih ve ………… sayılı kararı ile teze erişim 6 (altı) ay süreyle engellenmiştir.

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca vermiş olduğu güven ve destekle beni teşvik eden; bilgisi, enerjisi ve anlayışı ile yolumu aydınlatarak bana rehberlik eden, öğrencisi olmaktan dolayı mutluluk duyduğum kıymetli danışmanım Prof. Dr. Aydın GEZER'e çok teşekkür ederim.

Tavsiye ve önerileri ile tez çalışmama değerli katkılarda bulunan, bilgi ve birikimlerinden istifade ettiğim Doç. Dr. Çağrı KARAMAN ve Doç. Dr. Lokman BİLEN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İlgi ve desteklerinden dolayı KKEF öğretim üyeleri Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN, Prof. Dr. Levent AKGÜN ve Prof. Dr. Ali YILDIZ'a; kıymetli vaktini ayırarak yardımlarını esirgemeyen tez izleme komitesi üyesi Prof. Dr. Elif BOYDAŞ'a; Prof. Dr. Sezgin AKBULUT, Prof. Dr. Ömer TARAKCI ve Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU başta olmak üzere Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nün saygıdeğer hocalarına; deneyimlerini benimle paylaşan Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ, Doç. Dr. Sibel TURANLI ve Dr. Öğr. Üyesi Olgun DURMAZ'a; bu süreçte her daim görüş, öneri ve yardımlarıyla katkıda bulunan çok değerli yol arkadaşım Dr. Nurdoğan GÜNER'e şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca vermiş oldukları güven ve destekten, göstermiş oldukları anlayıştan dolayı başta annem Nebahat KARAKAŞ ve babam Mevlüt KARAKAŞ olmak üzere ailemin tüm fertlerine teşekkür ederim.

Erkan KARAKAŞ

ÖZET

DOKTORA TEZİ

RICCI QUARTER-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA SAHİP TANJANT DEMETİN GEOMETRİSİ

Erkan KARAKAŞ

Danışman: Prof. Dr. Aydın GEZER

Amaç: Bu tez çalışmasında üç amaç gözetilmektedir:

İlk olarak tam lift metriğine sahip TM tanjant demette bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun tanımlanması; tanımlanan bu konneksiyonun eğrilik, Ricci eğrilik ve skaler eğrilik tensörlerinin hesaplanması, hesaplanan bu eğrilik tensörlerinin bazı özelliklerinin incelenmesi ve bu konneksiyona göre ortalama konneksiyonun belirlenmesi amaçlanmaktadır.

İkinci olarak bu konneksiyona göre TM tanjant demette bazı özel vektör alanlarının (incompresible, harmonik, concurrent, konformal, projektif, $\tilde{\varphi}(Ric)$) karakterize edilmesi hedeflenmektedir.

Üçüncü olarak ise TM tanjant demetin bu konneksiyona göre bir soliton yapısına (Ricci soliton, gradyan Ricci soliton, genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton, Riemann soliton) sahip olması için gerekli ve yeterli koşulların belirlenmesi amaçlanmaktadır.

Yöntem: Bu çalışmada Hayden'in burulmalı uzayların alt uzaylarında konneksiyon tanımlama yönteminden faydalanılarak tanjant demette bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon tanımlanmıştır.

Bulgular: Tezde ilk olarak tam lift metriğine sahip tanjant demette Riemann konneksiyonun katsayıları ve özel seçilen deformasyon tensörünün yardımıyla bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon tanımlandı. Tanımlanan konneksiyonun eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve skaler eğrilik tensörü hesaplanarak, hesaplanan bu tensörlerinin çeşitli özellikleri incelendi. Yine bu yeni konneksiyonun ortalama konneksiyonu oluşturularak, ortalama konneksiyonun eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü hesaplandı. Ayrıca, tanjant demetin Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre Ricci semi-simetrik ve lokal Ricci-simetrik olması için gerekli koşullar elde edildi. İkinci olarak Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre tanjant demette bazı özel vektör alanları (incompresible, harmonik, concurrent, konformal, projektif, $\tilde{\varphi}(Ric)$) sınıflandırıldı. Üçüncü olarak TM tanjant demetin bu konneksiyona göre bir soliton yapısına (Ricci soliton, gradyan Ricci soliton, genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton, Riemann soliton) sahip olması için gerekli ve yeterli koşullar belirlendi.

Sonuç: Bu çalışmayla beraber ilk kez tanjant demet üzerinde bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon tanımlanarak, bu konneksiyona sahip tanjant demetin geometrisi araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tanjant demet, Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon, tam lift metriği, Ricci soliton, gradyan Ricci soliton, genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton, Riemann soliton, projektif vektör alanı, konformal vektör alanı, harmonik vektör alanı, concurrent vektör alanı, $\tilde{\varphi}(Ric)$ vektör alanı, incompresible vektör alanı.

Ocak 2025, 105 sayfa

ABSTRACT

DOCTORAL DISSERTATION

GEOMETRY OF TANGENT BUNDLE WITH RICCI QUARTER-SYMMETRIC METRIC CONNECTION

Erkan KARAKAŞ

Supervisor: Prof. Dr. Aydın GEZER

Purpose: Three objectives are pursued in this thesis:

Firstly, it is aimed to define a Ricci quarter-symmetric metric connection in the TM tangent bundle with complete lift metric; to calculate the curvature, Ricci curvature and scalar curvature tensors of this defined connection, to examine some properties of these calculated curvature tensors and to determine the mean connection according to this connection.

Secondly, according to this connection, it is aimed to characterize some special vector fields (incompresible, harmonic, concurrent, conformal, projective, $\tilde{\varphi}(Ric)$) on the TM tangent bundle.

Thirdly, it is intended to determine the necessary and sufficient conditions for the TM tangent bundle to have a soliton structure (Ricci soliton, gradient Ricci soliton, generalized Ricci-Yamabe soliton, Riemann soliton) according to this connection.

Method: In this study, a Ricci quarter-symmetric metric connection on the tangent bundle is defined by making use of Hayden's method of defining connections on subspaces of torsion spaces.

Findings: In the thesis, firstly, a Ricci quarter-symmetric metric connection is defined with the help of the coefficients of the Levi-Civita connection on the tangent bundle with complete lift metric and a specially chosen deformation tensor. The curvature tensor, Ricci curvature tensor and scalar curvature tensor of the defined connection are calculated and the different properties of these calculated tensors are investigated. Again, the mean connection of this new connection was created and the curvature tensor and Ricci curvature tensor of the mean connection were calculated. In addition, the necessary conditions for the tangent bundle to be Ricci semi-symmetric and locally Ricci-symmetric with respect to the Ricci quarter-symmetric metric connection were given. Secondly, some special vector fields (incompresible, harmonic, concurrent, conformal, projective, $\tilde{\varphi}(Ric)$) are classified on the tangent bundle according to the Ricci quarter-symmetric metric connection. Thirdly, the necessary and sufficient conditions for the TM tangent bundle to have a soliton structure (Ricci soliton, gradient Ricci soliton, generalized Ricci-Yamabe soliton, Riemann soliton) according to this connection were determined.

Results: With this study, for the first time a Ricci quarter-symmetric metric connection on the tangent bundle was defined and the geometry of the tangent bundle having this connection was investigated.

Keywords: Tangent bundle, Ricci quarter-symmetric metric connection, complete lift metric, Ricci soliton, gradient Ricci soliton, generalized Ricci-Yamabe soliton, Riemann soliton, projective vector field, conformal vector field, harmonic vector field, concurrent vector field, $\tilde{\varphi}(Ric)$ vector field, incompressible vector field.

January 2025, 105 pages

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
M	: n-boyutlu M manifoldu
TM	: M manifoldunun tanjant demeti
$C^{\infty}(M,\mathbb{R})$	: $f: M \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonların kümesi
C	: Kontraksiyon operatörü
D	: Türev operatörü
π	: Doğal izdüşüm fonksiyonu
$[X,Y]$	: X ve Y vektör alanlarının Lie çarpımı
L_X	: X vektör alanı yönündeki Lie türevi
∇	: M de tanımlı Riemann (Levi-Civita) konneksiyon
$\widetilde{\nabla}$	: TM de tanımlı Riemann (Levi-Civita) konneksiyon
$\overline{\nabla}$	: TM de tanımlı Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon
$\widehat{\nabla}$	: TM de tanımlı ortalama konneksiyon
∇_{X}	: X vektör alanı yönündeki kovaryant türev
Γ_{ij}^{k}	: M de tanımlı Riemann (Levi-Civita) konneksiyonun katsayıları
$\widetilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha}$	: TM de tanımlı Riemann (Levi-Civita) konneksiyonun katsayıları
$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$	: TM de tanımlı Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun katsayıları
$\widehat{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$	: TM de tanımlı ortalama konneksiyonun katsayıları
T_{ij}^{k}	: M manifoldunda tanımlı ∇ konneksiyonunun burulma tensörü
$\widetilde{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$	: TM de $\widetilde{\nabla}$ Riemann konneksiyonun burulma tensörü
$\overline{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$	: TM de $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü
$R_{ijk}{}^{l}$	: M manifoldunda tanımlı ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü
$\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma}$	: TM de $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü
$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma}$	: TM de $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü
$\widehat{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma}$	: TM de $\widehat{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü
R_{ij}	: M manifoldunda tanımlı ∇ konneksiyonunun Ricci tensörü
$\overline{R}_{\beta\gamma}$	: TM manifoldunda tanımlı $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun Ricci tensörü

$\hat{R}_{\beta\gamma}$	: TM manifoldunda tanımlı $\hat{\nabla}$ konneksiyonunun Ricci tensörü
τ	: M de ∇ konneksiyonunun skaler eğriliği
$\bar{\tau}$	: TM de $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun skaler eğriliği
g	: M de tanımlı Riemann metriği
$\tilde{g}$	: TM de tanımlı tam lift (*II*) metriği
$\hat{g}$	: TM de tanımlı (*I*+*II*) metriği
${}^{S}g$	: Sasaki metriği
${}^{C}g$	: TM de tanımlı tam lift (*II*) metriği
${}^{CG}g$	: Cheeger-Gromoll metriği
$T_P M$	: M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay
$(T_P M)^*$	: M manifoldunun p noktasındaki kotanjant uzay
$T_q^p(M)$	: M manifoldunda tanımlı tüm (p, q) tipli tensörlerin kümesi
$\mathfrak{I}\,(M)$	: M manifoldunda tanımlı tensör alanlarının toplamı
$\otimes$	: Tensör çarpımı
$\wedge$	: Kulkarni-Nomizu çarpımı
${}^{V}A$	: A tensör alanının dikey (vertikal) lifti
${}^{C}A$	: A tensör alanının tam (complete) lifti
${}^{H}A$	: A tensör alanının yatay (horizantal) lifti
PDE	: Partial Differential Equation (Kısmi Diferensiyel Denklem)

GİRİŞ

Matematikte devrimler sessiz, sakin gerçekleşir. Çarpışan ordular da yoktur, silahlar da. Hakkında gazetelerin arka sayfalarında kısa haberler çıkar. Göze çarpmazlar. Tıpkı Cambridge, Massachusetts'te, 7 Nisan 2003'ün soğuk, nemli öğleden sonrası gibi.

O saatte Grigory Perelman'ın konuşmasını dinlemek için MIT toplantı salonunu dolduranlar, entelektüel bir devrime ön sıradan şahit olduklarının farkındaydı. Bernard Riemann'ın "Geometri'nin Temellerine Dair Hipotezler (Über die Hypothesen die der Geometrie zu Grunde liegen)" başlıklı Yeterlik konferansını dinlemek için 1854 yılının 10 Haziran'ında Göttingen Üniversitesi'nin konferans salonunda toplananlar içinse durum böyle değildi. Bu konferans, adayların üniversitede akademik bir pozisyon alabilmek için geçmeleri gereken Orta Çağ'dan miras kalan son virajdı (O'Shea 2007).

Riemann, Yeterlik konferansı için jüriye üç muhtemel konu sunmuştu. Bunlardan ilk ikisi kompleks fonksiyonlar ve trigonometrik seriler üzerine araştırmaları ile ilgili, diğeri ise "Geometri'nin temellerine dair hipotezler" üzerineydi.

Geleneksel olarak jüri adayın kendini en rahat hissettiği konuyu anlatmasını isterdi ama jürideki en seçkin üye olan Gauss, ilk iki konuyu atlayarak üçüncü konuyu Riemann'dan sunmasını istedi. Gauss'un bu tercihinin nedeni üçüncü konunun kendisinin de ilgi duyduğu ama Öklidyen geometrinin doğruluğu ve zorunluluğunu benimseyen Kant'ın Matematik felsefesinin etkisini sarsmaktan imtina ettiği için yayımlamaya cesaret edemediği "Öklid dışı geometriler" ile ilgili olmasından kaynaklanıyordu (Demir 2016).

Avrupa ile Almanya'da entelektüel çevrede etkili olan Kant, 1781'de yayımladığı Saf Aklın Eleştirisi'nde evrenin Öklidyen olduğunu ima eder. Ona göre uzayın gerçek geometrisi, ancak deneyle bulunabilecek fiziksel bir olgudur (Yalçın 2003).

Riemann sade bir Almanca ile verdiği konferansla sadece Gauss'un yüzeyler üzerine olan teorisini n-boyutlu duruma taşımakla kalmamış etkisi ve sonuçları ile üç bin yıllık geometrinin şeklini değiştirecek sessiz bir devrime imza atmıştır. Riemann, izafiyet teorisinden Poincaré'in çalışmalarının çoğuna, uzay-zaman yapısından Perelman'ın çalışmalarına kadar dokunduğu her alanda bir temel oluşturacak olan bu n-boyutlu durumu manifold olarak adlandırmıştır. Manifold kavramını tanımlarken Öklidyen geometride iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı gösteren ölçme bağıntısını n-boyutlu duruma genelleştirir. Öklidyen düzlemde (x^1, x^2) ve $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık l olmak üzere,

$$l = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}$$

şeklinde olup $i, j = 1,2$ için bu l uzunluğu

$$l = \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

olarak ifade edilebilir. Bu eşitlikte $g_{11} = g_{22} = 1$ ve $g_{12} = g_{21} = 0$ dır. Riemann bu ölçme bağıntısını $i, j = 1, \ldots, n$ için

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

durumuna genelleştirerek Öklidyen uzaydaki uzunluk kavramını manifold üzerine bir metrik bağıntı (Riemann metriği) olarak taşımış oldu. Artık metrik bağıntı sadece Öklidyen uzaydaki Pisagor teoremi yardımıyla elde edilen uzunluk kavramı olmak zorunda değildi. Uygun metrik bağıntı belirlenerek Öklidyen uzayda uzaklık kavramına bağlı olarak tanımlanan açı vb. kavramları manifold üzerinde tanımlamak mümkündü. Böylece uzayın geometrisi belirlenebilecekti (Şahin 2015).

Manifold teorisinde Öklidyen ve Öklidyen dışı geometrileri birleştiren temel unsur bir noktadan başka bir noktaya değişen eğrilik kavramıdır. Öklidyen düzlem eğriliği sıfır olan bir yüzeyken, küre veya $z = x^2 - y^2$ gibi eyer yüzeyleri eğriliğe sahip 2-manifoldlardır. Eğriliği sıfır olmayan bu tür uzaylarda, paralellik aksiyomunun durumunu belirlemek için Öklidyen uzaydaki doğru kavramına uygun bir karşılık tanımlamak gerekir. Öklidyen uzayda doğru, iki nokta arasındaki en kısa mesafeyi ifade ederken; eğriliğe sahip bir uzayda bu kavrama jeodezikler karşılık gelir. Örneğin, küre üzerinde büyük çemberler jeodeziklerdir; dolayısıyla kürenin jeodezikleri büyük çemberler olarak tanımlanır. Bir küre üzerinde, bir L büyük çemberi ve bu çember üzerinde olmayan bir P noktası verildiğinde, P noktasından geçen ve L ye paralel olan başka bir büyük çember bulunmaz. Bu durum, pozitif eğriliğe sahip olan kürelerin eliptik geometriye model oluşturduğunu gösterir. Öte yandan, negatif eğrilikli yüzeyler hiperbolik geometriye model oluşturur ve bu tür geometrilerde, bir L jeodeziği (doğru) ve bir P noktası verildiğinde, P noktasından geçen ve L ye paralel olan birden fazla doğru bulunabilir.

Bu bağlamda, manifoldun metrik özellikleri, manifoldun eğriliğinden kaynaklanır. Riemann, yüksek boyutlu manifoldların eğriliğini belirlemek için manifoldun içindeki yüzeylerin Gauss eğriliğinden yararlanmıştır. Manifoldun eğriliği, onun geometrik özelliklerini belirleyen temel bir unsurdur. Örneğin, sıfır eğrilikli bir düzlemde bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derece iken, pozitif eğriliğe sahip bir küre üzerinde çizilen bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceden büyüktür. Buna karşılık, negatif eğrilikli bir eyer yüzeyi üzerinde çizilen bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceden küçüktür. Tüm bu farklılıklar, manifoldun eğriliğinden kaynaklanmaktadır (Şahin 2012).

Riemann tarafından ilk kez *"Mannigfaltigkeit"* olarak adlandırılan ve Clifford tarafından İngilizce'ye *"Manifoldness"* olarak çevrilen manifold kavramı, temel olarak yüzey kavramını çok boyutlu uzaylara genelleştirmek amacıyla ortaya çıkmıştır. En genel tanımıyla manifold, her bir noktasında bu noktayı kapsayan ve Öklid uzayının açık bir alt kümesiyle homeomorfik olacak şekilde açık bir kümesi bulunan bir Hausdorff uzayıdır. Başka bir deyişle, manifoldlar lokal olarak Öklid uzayına benzeyen nokta kümeleridir.

Manifoldu kaplayan bu açık kümelere "haritalar", bu haritaların oluşturduğu topluluğa ise "atlas" denir. Manifold ile Öklid uzayı arasında birer homeomorfizm olan bu haritalar ve atlaslar sayesinde manifold üzerinde bir "diferensiyel yapı" tanımlanabilir. Bu yapı sayesinde, manifoldların çoğunun vektör uzayı yapısına sahip olmamasından dolayı gerçekleştirilemeyen türev ve integral alma gibi işlemler, bu işlemleri kolaylıkla yapabileceğimiz Öklid uzayı aracılığıyla manifold üzerinde uygulanabilir hale gelmektedir. Ayrıca, diferensiyel yapı tanımlanmış bir manifold, "diferensiyellenebilir manifold" olarak adlandırılır (Şuhubi 2008).

Manifoldlar üzerinde tanımlanan en temel kavram tanjant vektör kavramıdır. Bir diferensiyellenebilir manifoldun bir P noktasındaki "tanjant vektörler" ve bu vektörlerin oluşturduğu "tanjant uzay" tanımlanırken iki amaç hedeflenir:

- Öklid uzaylarında alışık olduğumuz gibi fonksiyonların bir doğrultu boyunca türevi kavramını manifoldlara genişletmek,
- P noktası civarında çeşitli büyüklüklerin türetilebilme özelliklerini yerel koordinatlardan bağımsız olarak belirleyebilmek ve manifolda lokal olarak lineer bir vektör uzayı yapısı kazandırmak (Şuhubi 2008).

Tanımlanan diferensiyel yapı ve tanjant vektör sayesinde manifold üzerinde sırasıyla diferensiyel ve cebirsel işlemler yapmak olanaklı hale gelmektedir.

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu verildiğinde, M üzerindeki temel elemanların diğer manifoldlara aktarılması ve M üzerindeki yapılar ile diğer manifoldlar üzerindeki yapılar arasındaki ilişkinin araştırılması önemli bir problemdir. Bu yaklaşımla, M ve diğer manifoldların geometrisi arasındaki ilişkiler incelenebilir (Özkan 2006).

M manifolduna difeomorfik olan manifoldlar dışında, M ile en yakın ilişkili olan manifold M nin tanjant demetidir. M manifoldunun her bir noktasındaki tanjant uzayların ayrık birleşimi "tanjant demet" olarak adlandırılır ve TM ile gösterilir:

$$TM = \bigcup_{p \in M} (\boldsymbol{T_p} M)$$

Bu bağlamda M, TM nin baz manifoldu olarak kabul edilir.

Tanjant demet kavramının temeli, Sasaki'nin 1958 yılında yayımladığı ve bu alanda öncü bir role sahip olan makalesine kadar uzanmaktadır. Bu ufuk açıcı çalışmada Sasaki, diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde verilen g metriğini kullanarak TM tanjant demette ${}^{S}g$ metriğini (Sasaki metriği) inşa eder (Sasaki 1958; Gudmundsson and Kappos 2002).

TM tanjant demetteki herhangi bir G metriği, M baz manifoldu üzerinde verilen bir g Riemann metriğinden elde edilebiliyorsa bu tür metrikler "g-doğal metrik" olarak adlandırılır. Sasaki metriği, doğal bir metrik olmasına rağmen rijit (katı, değişmez) yapıya sahiptir. Yani, TM tanjant demetin geometrik özelliklerinin çoğu (lokal flat olma, lokal simetrik olma, sabit skaler eğrilikli olma) M baz manifoldu flat (düz) olmadıkça sağlanamaz (Kowalski 1971; Aso 1981; Musso and Tricerri 1988).

Bir diğer iyi bilinen g-doğal metrik ise, Cheeger ve Gromoll (1972) tarafından tanımlanmasına rağmen, anlaşılabilir bir şekilde Musso ve Tricerri (1988) tarafından ifade edilmiş olan Cheeger-Gromoll (${}^{CG}g$) metriğidir. Sasaki metriğinin aksine bu metriğe göre (M, g) baz manifoldu lokal flat olsa da $(TM, {}^{CG}g)$ lokal flat olmamaktadır.

Tensör alanlarının ve konneksiyonların "dikey ve tam liftleri" Yano ve Kobayashi (1966); "yatay liftleri" ise Yano ve Ishihara (1967) tarafından geliştirilerek M üzerindeki temel elemanlar TM tanjant demete taşınmıştır.

Yano ve Ishihara (1973), M üzerinde tanımlı bir g Riemann metriğinin klasik liftleri vasıtasıyla TM üzerinde Riemann ya da pseudo-Riemann metrikler olarak addedilen metrikleri tanımlayarak, bu metriklere göre TM tanjant demetin geometrik özelliklerini incelemişlerdir.

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde verilen bir g Riemann metriğinin yardımıyla TM tanjant demet üzerinde inşa edilebilen metriklerin iyi bilinen klasik örnekleri ${}^{S}g$ Sasaki metriği, ${}^{H}g$ yatay lift ve ${}^{V}g$ dikey lifttir. Bu metriklerin yapısı aşağıdaki gibi verilmiştir.

a) ${}^{S}g$ Sasaki metriği, TM tanjant demet üzerinde pozitif tanımlı bir Riemann metriği olup M üzerinde verilen g Riemann metriğinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&{}^{S}g({}^{H}X, {}^{H}Y) = g(X,Y),\\
&{}^{S}g({}^{H}X, {}^{V}Y) = {}^{S}g({}^{V}X, {}^{H}Y) = 0,\\
&{}^{S}g({}^{V}X, {}^{V}Y) = g(X,Y).
\end{aligned}
$$

b) g metriğinin ${}^{H}g$ yatay lifti, TM tanjant demet üzerinde bir pseudo-Riemann metriği olup şu şekilde verilir:

$$
\begin{aligned}
&{}^{H}g({}^{H}X, {}^{H}Y) = 0,\\
&{}^{H}g({}^{H}X, {}^{V}Y) = {}^{H}g({}^{V}X, {}^{H}Y) = g(X,Y),\\
&{}^{H}g({}^{V}X, {}^{V}Y) = 0.
\end{aligned}
$$

c) g metriğinin ${}^{V}g$ dikey lifti, TM tanjant demet üzerinde bir dejenere metrik olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
&{}^{V}g({}^{H}X, {}^{H}Y) = 0,\\
&{}^{V}g({}^{H}X, {}^{V}Y) = {}^{V}g({}^{V}X, {}^{H}Y) = 0,\\
&{}^{V}g({}^{V}X, {}^{V}Y) = g(X,Y).
\end{aligned}
$$

Burada X, Y, Z, M manifoldu üzerinde tanımlı vektör alanlarıdır.

Bir başka klasik yapı ise tensör alanlarının TM tanjant demete ${}^{C}g$ tam liftidir. Bir g Riemann metriğinin ${}^{C}g$ tam lifti ile yukarıda verilen ${}^{H}g$ yatay lifti çakışmaktadır (Gezer *et al.* 2015).

TM tanjant demet üzerinde ${}^{S}g$, ${}^{H}g$ ve ${}^{V}g$ liftleri kullanılarak farklı metrikler oluşturulabilir. Örneğin Abbassi ve Sarih (2005a), tanjant demette g Riemann metriğinin dikey, yatay ve Sasaki liftlerinin kombinasyonundan oluşan $G = a\,{}^{S}g + b\,{}^{H}g + c\,{}^{V}g$ şeklinde bir metrik tanımlayarak bu metriğe sahip tanjant demetin sabit skaler eğrilikli uzay olması için baz manifoldun lokal flat olması gerektiğini göstermişlerdir. Burada a, b, c; $a > 0$ ve $a(a + c) - b^2 > 0$ şartlarını sağlayan sabitlerdir.

Ayrıca Abbassi ve Sarih (2005b), (TM, G) tanjant demetteki her Riemann g-doğal metriği G nin aşağıdaki kalıtsal özelliklere sahip olduğunu göstermiştir:

“(TM, G) sırasıyla flat, veya lokal simetrik, veya sabit kesitsel eğrilikli, veya sabit skaler eğrilikli, veya Einstein manifoldu ise (M, g) de sırasıyla aynı özelliklere sahiptir.”

Yukarıda bahsedilen tüm metrikler ilk olarak Kowalski ve Sekizawa tarafından sınıflandırılan, Abbassi ve Sarih tarafından tam olarak karakterize edilen tanjant demet üzerindeki g-doğal metrikler sınıfına aittir (Kowalski and Sekizawa 1988; Abbassi 2004; Abbassi and Sarih 2005b).

Konneksiyon kavramı, ilk olarak 1869 yılında Elwin Bruno Christoffel'in "Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades" başlıklı çalışmasında dolaylı bir şekilde ortaya konulmuştur. Bu çalışmada Christoffel, bugün kendi adıyla anılan Christoffel sembollerini (Γ_{ij}^{k}) tanıtmış, ancak bu sembollerin bir konneksiyon ifade ettiğini fark edememiştir. Christoffel'in amacı, ikinci dereceden diferensiyel ifadelerin değişken değişimleri altında nasıl dönüştüğünü incelemekti. Christoffel bu amaçla aynı g Riemann metriğinin

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x^k)dx^i dx^j = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}(y^\gamma)dy^\alpha dy^\beta$$

şeklindeki ilişkisini dikkate alır. Burada (x^k) ve (y^γ) koordinatları ile bunların diferensiyelleri f dönüşümü ile ilişkidir (yani $y = f(x)$). Christoffel, f dönüşümünün ikinci kısmi türevini izole etmek için bugün belirtilen aşağıdaki katsayıları ortaya koyar:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).$$

Böylece Γ_{ij}^{k} katsayılarının koordinat dönüşümü altında nasıl dönüştüğünü belirleyen aşağıdaki temel denklemi elde eder:

$$\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^i \partial x^l} = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{li}^{j}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j} - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^l}$$

Bu bağlamda, g Riemann metriği üzerinden türetilen bu semboller, koordinat sisteminden bağımsız bir diferensiyel hesaplama yöntemi geliştirilmesine olanak sağlamıştır. Ancak, Christoffel'ın bu sembolleri yalnızca matematiksel bir sınıflandırma problemi çerçevesinde ele aldığı ve herhangi bir geometrik yoruma ulaşamadığı görülmektedir.

Riemann metriğinden elde edilen Christoffel sembollerinin "koordinatsız" bir diferensiyel hesap oluşturmak için kullanılabileceğini fark eden Gregorio Ricci-Curbastro'ydu. Diferensiyel hesabın bu şekilde genişletilmesi, kovaryant türev aracılığıyla kısmi türevin eğrilikli (yani Öklid dışı) uzaylarda uygulanmasına olanak tanımıştır. Bu genişleme, kovaryant türev yardımıyla, eğri uzaylarda türev almayı mümkün kılmıştır.

Ricci, bir X $(X = \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial}{\partial x^j})$ vektör alanının kovaryant türevini lokal koordinatlarda şu şekilde tanımlar:

$$X_{;j}^{i} = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{\mathrm{js}}^{\mathrm{i}} X^s$$

Öklidyen uzayda kovaryant türev, Christoffel sembollerinin sıfır olması nedeniyle kısmi türeve indirgenir. Modern notasyonda $X_{;j}^{i}$ kovaryant türevi $\left(\nabla_j X\right)^i$ olarak yazılır. Ricci, bu türevlerin koordinat sisteminden bağımsız olmasını sağlamıştır. Bu koordinat bağımsızlığı, diferensiyel hesabın bu genişletilmiş biçiminin "mutlak diferensiyel hesap" olarak adlandırılmasına yol açmıştır. Ancak, mutlak diferensiyel hesap, biçimsel bir yapı olmasına rağmen geometrik bir yoruma sahip değildi.

1917 yılına kadar tamamen analitik bir algoritma olarak değerlendirilen "konneksiyon" kavramı, bu tarihte Levi-Civita tarafından geometrik bir bağlamda ele alınmıştır. Levi-Civita, bir Riemann manifoldunda paralellik kavramını, 1917 yılında yayımladığı "Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana" başlıklı çalışmasında tanımlamıştır. Bu çalışmanın önemi, kovaryant türev hakkında sunduğu geometrik yorumdur. Levi-Civita'ya göre, kovaryant türev, izometrik olarak Öklid uzayına gömülü bir manifold üzerinde, bir tanjant vektör boyunca alınan Öklid türevinin manifoldun tanjant uzayına izdüşümü olarak görülebilir. Levi-Civita'nın kovaryant türev operatörüne özgü paralellikten bahsetmesinden kısa bir süre sonra, konneksiyon teorisi gerçek anlamda doğmuş oldu.

"Konneksiyon" terimi ilk kez 1918 yılında Hermann Weyl'in "Reine Infinitesimal Geometrie" adlı çalışmasında geçer. Bu çalışmada Weyl, bir afin konneksiyonu, "P noktasındaki bir vektörün P ye sonsuz yakın bir Q noktasına paralel taşınması durumunda Q daki hangi vektöre dönüşeceğini belirleyen dönüşüm" olarak tanımlar. Weyl'in paralel taşıma için öne sürdüğü koşul, "vektörlerin tümünün P den Q ya taşınmasının bir afin dönüşüm üretmesi" dir. Burada "afin" terimi, dönüşümün doğrusal olması ve uzaklık oranlarını koruması anlamına gelirken, açıları ve uzunlukları koruma zorunluluğu bulunmadığını ifade etmektedir. Weyl, afin konneksiyonun bileşenlerini $\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} = \Gamma_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}}$ olarak tanımlamıştır. Weyl, ayrıca metrik bir manifold üzerindeki afin konneksiyonları ele almış ve bu bağlamda Christoffel sembollerini kullanmıştır.

Levi-Civita'nın kovaryant türev işlemi yoluyla paralel taşıma kavramı Weyl'in konneksiyon tanımıyla uyumlu olduğundan, Levi-Civita'nın paralel taşıma sistemi günümüzde Levi-Civita konneksiyonu olarak ifade edilmektedir. Böylece konneksiyon kavramı, eğri yüzeylerde ikinci türev almayı ve paralellik durumunu sağlayarak iki önemli sorunu çözmüştür (Freemann 2008).

Levi-Civita konneksiyonu, bir Riemann veya pseudo-Riemann manifoldu üzerindeki metrik ile uyumlu (metriği paralel bırakan) burulmasız tek afin konneksiyondur. Bu konneksiyonun katsayıları yardımıyla manifold üzerinde farklı konneksiyonlar tanımlanabilir. Bu konneksiyonlardan biri de Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyondur.

Quarter-simetrik konneksiyonlar, Golab tarafından 1975 yılında lineer konneksiyonlu diferensiyellenebilir manifoldlar üzerinde tanımlanmıştır. Bir lineer konneksiyonun T burulma tensörü

$$T(X,Y) = u(Y)\phi X - u(X)\phi Y$$

şeklinde ise bu lineer konneksiyon quarter-simetrik konneksiyon olarak adlandırılır (Golab 1975). Burada, $\rho \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere u,

$$u(X) = g(X,\rho)$$

şeklinde tanımlanan 1-form ve $\phi \in \Im_1^1(M)$ dir. Eğer $(1,1)$ tipli ϕ tensörü, birim tensör olarak alınırsa, quarter-simetrik konneksiyon, semi-simetrik konneksiyona dönüşür. Dolayısıyla quarter-simetrik konneksiyon, semi-simetrik konneksiyon kavramının bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Bununla beraber quarter-simetrik metrik konneksiyonların Riemannian, Hermitian ve Kaehlerian manifoldlar üzerindeki en genel hali Yano ve Imai tarafından sunulmuştur (Yano and Imai 1982).

Ayrıca $\phi \in \Im_1^1(M)$ tensörü

$$g(\phi X,Y) = R(X,Y)$$

şeklinde tanımlanan (1,1) tipli bir Ricci tensörü olarak alınırsa quarter-simetrik konneksiyon Ricci quarter-simetrik konneksiyon olarak adlandırılır. Ricci quarter-simetrik konneksiyon kavramı, bir Riemann manifoldu üzerinde Kamilya ve De tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada Ricci quarter-simetrik konneksiyonun Ricci tensörünün simetrik olması için gerekli ve yeterli şartlar bulunmuş; indirgenmiş konneksiyon ile lineer konneksiyonun konformal eğrilik tensörlerinin eşit olduğu gösterilmiştir (Kamilya and De 1995).

Bölümün başında bahsedilen MIT (Massachusetts Teknoloji Enstitüsü) toplantı salonuna yeniden dönecek olursak Perelman tahtaya aşağıdaki kısa denklemi yazarak konferansa başlar:

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric\big(g(t)\big).$$

Ricci akışı denklemi adı verilen bu denklem bir tür ısı denklemi olup bu denklemde uzayın eğriliği, daha yüksek eğriliğe sahip bölgelerden daha az eğriliğe sahip bölgelere akarak yayılmaya çalışan erimiş lava benzer egzotik bir tür ısı gibi görülür. Hamilton tarafından 1982 yılında tanımlanan Ricci akışı, metriğin (yani manifoldun şeklinin) Ricci tensörü ile orantılı olarak, uygun sabit eğrilikli bir metriğe dönüşmesini sağlayan bir kısmi diferensiyel denklemdir (Hamilton 1982; Hamilton 1988).

Perelman salondaki dinleyicilerden evrenimizi, tüm olası evrenlerden oluşan devasa soyut kümenin bir elemanı olarak düşünmelerini isterken amacı Henri Poincaré tarafından 1904'te ortaya atılan evrenin olası şekline ilişkin cesur tahminini (Poincaré sanısı, Poincaré varsayımı) Ricci akış denkleminden yola çıkarak ispatlamaktı (O'Shea 2007).

20. yüzyıl matematiğinin çözülememiş en ünlü problemlerinden biri olan Poincaré varsayımı: "Kapalı, basit bağlantılı 3 boyutlu bir manifoldun bir küreye (S^3) izomorfik olması gerektiği" fikrine dayanıyordu. Bu varsayıma 1970'lerde önemli katkılarda bulunan William Thurston, "tüm 3-boyutlu Riemann manifoldlarının benzer bir şekilde sınıflandırılabileceğini" öne süren ve daha geniş bir hipotez olan Geometrizasyon varsayımını ortaya atmıştır.

Grigori Perelman'ın Geometrizasyon varsayımını ve dolayısıyla Poincaré varsayımını, Ricci akışını kullanarak kanıtlamasından sonra bazı geometrik akış denklemleri ve bu denklemlerin kendi kendine benzer çözümleri olan solitonlar dikkat çekmeye ve incelenmeye başlanmıştır. Bunların en ünlü ve en çok incelenen sınıfı, Ricci akışının sabit noktaları olarak tanımlanan Ricci solitonlardır.

Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki düzgün bir V vektör alanı

$$\frac{1}{2}L_V g + Ric = \lambda g$$

şartını sağlıyorsa (M, g) Riemann manifoldu Ricci soliton olarak adlandırılır. Burada $L_V g$, Riemann metriği g nin V ye göre Lie türevi; Ric, (M, g) nin Ricci tensörü ve λ bir sabittir.

Bir diğer geometrik akış ise yine Hamilton tarafından 1980'lerin sonlarında Yamabe problemini ele almak için tanımlanan Yamabe akışı kavramıdır. Yamabe problemi, "skaler eğriliği sabit olacak şekilde $n \geq 3$ boyutlu bir kompakt Riemann manifoldu üzerinde g Riemann metriğine konformal olan bir metrik" aramaktan ibarettir. Bu nedenle, Yamabe akışı bir M Riemann manifoldu üzerinde

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -\tau\big(g(t)\big)$$

eşitliğini sağlayan $g(t)$ metriği olarak tanımlanır. Burada τ, M nin skaler eğriliğidir.

Yamabe akışının kendi kendine benzer çözümleri olan Yamabe solitonları ise Barbosa ve Ribeiro tarafından tanımlanmıştır. Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde

$$\frac{1}{2}L_V g = (\tau - \lambda)g$$

olacak şekilde bir V vektör alanı var ise (M, g) Riemann manifoldu bir Yamabe solitonu belirtir. Burada L_V, V vektör alanına göre Lie türevini, λ ise bir sabiti göstermektedir.

Hamilton'un Ricci ve Yamabe akışları üzerindeki çalışmaları, Riemann akışları üzerine çalışmalar yapan Udrişte'ye ilham vermiştir. Udrişte, Ricci akışı kavramını doğal bir şekilde genişleterek diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde Riemann eğrilik tensörünü içeren doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklem (PDE) oluşturdu:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = -2Riem\big(g(x, t)\big).$$

Burada $G(x, t) = g(x, t) \wedge g(x, t)$, $x \in M, t \in M$ ve $Riem$, Riemann tensör alanıdır. Bu çerçevede, yukarıda belirtilen PDE nin çözümü olan g metriği bir Riemann akış olarak adlandırılır. Udrişte'nin yaklaşımında Ricci soliton kavramı, Riemann soliton kavramıyla değiştirilir. Bir Riemann solitonuna, Riemann akışı bağlamında kinematik bir çözüm olarak bakılabilir ve profili, sabit kesit eğriliğine sahip uzayları kapsayan daha geniş bir perspektif sunar (Udrişte and Hirica 2016; Udrişte 2020).

Yukarıda verilen literatür taramasından yola çıkılarak bu çalışmada üç temel problem üzerinde durulacaktır. Birinci problem olarak, ${}^{C}g$ tam lift metriği kullanılarak TM tanjant demette bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon tanımlanacak, tanımlanan bu konneksiyon yardımıyla TM tanjant demetin geometrik özellikleri araştırılacaktır. İkinci problemde tanımlanan Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre TM tanjant demet üzerinde bazı özel vektör alanlarının karakterizasyonu üzerinde durulacaktır. Üçüncü problem ise TM tanjant demetin Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir soliton (Ricci soliton, gradyan Ricci soliton, genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton, Riemann soliton) yapısına sahip olması için gerekli ve yeterli koşulların belirlenmesi üzerinedir.

Tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. "Kuramsal Temeller" adlı ikinci bölümde temel tanım, kavram, notasyon ve teoremlere yer verilmiştir.

"Materyal ve Yöntem" adlı üçüncü bölümde tanjant demet, baz manifold üzerinde verilen temel elemanların tanjant demete liftleri, Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon, adapte olmuş çatı hakkında temel tanım ve bilgiler yer almaktadır.

“Araştırma Bulguları ve Tartışma” adlı dördüncü bölümde, TM tanjant demet üzerinde bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon tanımlanarak, tanımlanan bu yeni konneksiyona göre TM tanjant demetin geometrik özelliklerinin incelenmesi; özel vektör alanlarının karakterizasyonu ve çeşitli soliton yapıların inşası için gerekli ve yeterli olan şartların belirlenmesi üzerinde durulmuştur.

“Sonuç” adlı son bölümde ise tezden elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

KURAMSAL TEMELLER

Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 1: M ve N birer topolojik uzay olmak üzere, $f: M \to N$ fonksiyonu verilsin. N uzayının her açık alt kümesinin f^{-1} deki ters görüntüsü, M uzayının açık bir alt kümesi ise f fonksiyonuna sürekli fonksiyon denir. Ayrıca $f: M \to N$ fonksiyonu birebir, örten ve sürekli iken $f^{-1}: N \to M$ de sürekli ise f fonksiyonuna M den N ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) adı verilir (Sabuncuoğlu 2006).

Burada M ve N uzayları arasında bir homeomorfizm olduğu taktirde M ve N uzaylarına homeomorfiktir veya topolojik olarak birbirine denktir denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2: M bir Hausdorff uzayı olmak üzere, $\forall\, p \in M$ için $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt kümesine homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir U açık komşuluğu varsa M ye bir topolojik manifold ya da kısaca manifold denir. Yani bir manifold lokal olarak Öklid uzayına eşdeğerdir (Şuhubi 2008).

Bu taktirde $boy(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan, manifoldun boyutu da n dir ve n-boyutlu M manifoldu M_n olarakta gösterilebilir (Şahin 2012).

Tanım 3: Tanım 2'ye göre, herhangi bir $U \subset M$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ açık bölgesine olan $\varphi: U \to V$ bir homeomorfizm ise (U, φ) ikilisine n-boyutlu harita (veya n-boyutlu koordinat sistemi) denir (Salimov ve Mağden 2008).

U açık kümesi ise haritanın tanım bölgesi veya koordinat bölgesi (koordinat komşuluğu) olur (Şuhubi 2008; Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 4: φ bir homeomorfizm olduğundan, $p \in U \subset M$ noktası için

$$\varphi(p) = x = (x^1(p), \dots, x^n(p))$$

yazılır. Böylece φ homeomorfizmi, M manifoldunun her bir p noktasına $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ n-lisini karşılık getirmiş olur. $x^1(p), \dots, x^n(p)$ reel sayılarına $p \in M$ noktasının (U, φ) haritasındaki lokal koordinatları adı verilir. Yani $p \in M$ noktasının koordinatları, $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının koordinatları olarak tanımlanır (Şuhubi 2008; Şahin 2012).

Dolayısıyla bir harita bir "lokal koordinat takımı" oluşturur. Bir topolojik manifoldun her bir noktasında n-boyutlu bir harita varsa manifoldun boyutu bu n sayısıdır. Tüm haritalardaki lokal koordinat takımlarının birleşimi ise M manifoldunun "koordinat örtüsünü" oluşturur. $\varphi^{-1}: V \to U$ ters dönüşümü ise U kümesinin bir parametrelemesi adını alır ve $x^1, x^2, \ldots, x^n$ koordinatlarına U kümesinin parametreleri denir.

M manifoldu üzerindeki koordinat çizgileri, $\mathbb{R}^n$ deki kartezyen koordinat çizgilerinin $\varphi^{-1}: V \to U$ dönüşümü altındaki görüntüleri olan eğriler olup M manifoldu p noktası civarında lokal olarak $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt kümesi gibi davranmaktadır (Şuhubi 2008).

Tanım 5: M topolojik uzayı üstünde, keyfi $\alpha, \beta \in I$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) iki farklı harita verilsin. $U_\alpha \cap U_\beta$ arakesit kümesinin φ_α ve φ_β altında $\mathbb{R}^n$ deki görüntüleri genellikle farklı olacaktır. φ_α ve φ_β homeomorfizmlerinin ortak tanım bölgesi $U_\alpha \cap U_\beta$ üzerinde, bir noktanın φ_α altındaki koordinatları $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ olsun. φ_α bir homeomorfizm olup ${\varphi_\alpha}^{-1}$ tersi var olduğundan, $U_\alpha \cap U_\beta$ de bir tek p noktası vardır. Bu p noktasının φ_β altındaki koordinatları ise $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ olmak üzere bu koordinatlar arasında,

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

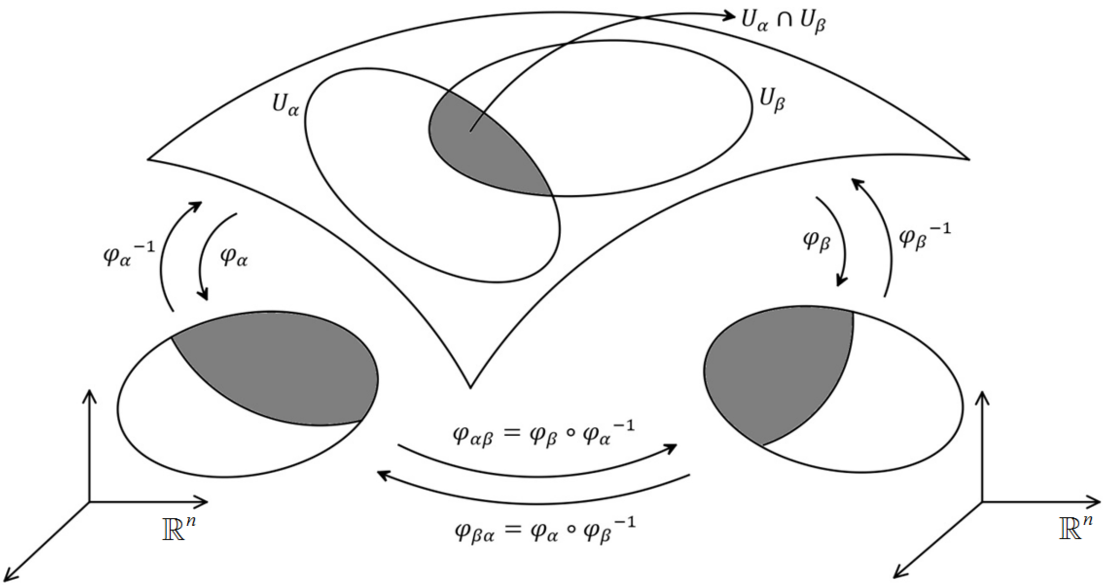
$${\varphi_{\alpha\beta}}^{-1} = \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

olacak şekilde,

$$y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \left(\varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\right)^i \tag{1}$$

$$x^i = g^i(y^1, y^2, \ldots, y^n) = \left(\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1}(y^1, y^2, \ldots, y^n)\right)^i \tag{2}$$

bağıntıları elde edilir. Şekil 1 dikkate alındığında bu bağıntıların $U_\alpha \cap U_\beta$ açık kümesi üzerinde bir koordinat dönüşümüne karşılık geldiği açıktır.



Şekil 1. Diferensiyellenebilir atlas

f^i ve g^i fonksiyonlarının sırasıyla x^i ve y^i değişkenlerine göre k. ve daha küçük mertebeden sürekli kısmi türevleri varsa $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları k. mertebeden uyumludur (C^k-bağdaşır veya C^k-uzlaşır) denir.

$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ ise bu haritalar uyumlu olarak kabul edilir. Burada $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $(y^1, y^2, \dots, y^n) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ve $i = 1,2, \dots, n$ şeklindedir (Şuhubi 2008; Şahin 2012).

Tanım 6: M, n-boyutlu bir manifold olsun. Eğer M üzerindeki haritaların bir ailesi olan $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta), (U_\gamma, \varphi_\gamma), \dots\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A kolleksiyonuna k. mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya C^k-sınıfından atlas) adı verilir (Şuhubi 2008).

i) $\{U_\alpha, U_\beta, U_\gamma, \dots\}$ açık kümelerinin kolleksiyonu M manifoldunun açık bir örtüsüdür. Yani

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha.$$

ii) A daki herhangi iki harita k. mertebeden uyumludur (veya C^k sınıfındandır).

iii) A maksimaldir. Yani A nın elemanlarıyla uyumlu bütün koordinat atlasları yine A nın elemanı oluyorsa A ya M üzerinde bir maksimal atlas (veya tam atlas) denir.

Tanım 7: M manifoldu üzerinde k. mertebeden maksimal bir atlas varsa M manifolduna k. mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir.

Eğer (1) ve (2) reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarının her mertebeden sürekli kısmi türevleri var ise M manifolduna C^∞ atlas veya C^∞ diferensiyellenebilir manifold adı verilir. C^∞ diferensiyellenebilir manifolduna kısaca düzgün manifold da denir (Şuhubi 2008).

Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar

Tanım 8: M, n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve $f: M \to \mathbb{R}$ olsun. $p \in M$ noktasını içine alan bir $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritası için $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$f(p) = f(\varphi_\alpha{}^{-1}(x)) = (f \circ \varphi_\alpha{}^{-1})(x)$$

yazılır. $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde $(f \circ \varphi^{-1}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reel değerli, n değişkenli fonksiyonu için $x = \varphi_\alpha(p)$ olmak üzere, $f(p) = (f \circ \varphi^{-1})(x)$ eşitliği vardır. $(f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n)$ fonksiyonunun $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ noktasında k. mertebeye kadar sürekli kısmi türevleri varsa f fonksiyonuna $p \in M$ noktasında k. mertebeden diferensiyellenebilirdir denir (Şuhubi 2008).

k. mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, C^k sınıfından bir fonksiyon olarak nitelenir ve $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ olarak gösterilir. Burada $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V \subset \mathbb{R}^n$ dir. Eğer $(f \circ \varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n)$ fonksiyonunun $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ noktasında her mertebeden sürekli kısmi türevleri varsa f fonksiyonuna düzgün fonksiyon denir ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları

Tanım 9: M, n-boyutlu bir manifold, $p \in M$ ve manifold üzerindeki düzgün fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. p noktasındaki bir harita (U, φ) ise $\varphi(p) = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ iken $p = \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n)$ olup

$$y = f(p) = f(\varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n)) = g\,(x^1, \ldots, x^n)$$

yazılır. Burada $g = f \circ \varphi^{-1}$ şeklindedir. f ve g fonksiyonları için

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p := \left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}$$

eşitliği göz önüne alınsın. Burada $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$ ifadesi $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f)$ şeklinde de gösterilebilir.

n tane olan $\xi^i \in \mathbb{R}$ sayıları için,

$$V_p(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p$$

biçiminde tanımlanan $V_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyon,

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$$

şeklinde olup ve bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesi de T_pM ile gösterilsin. T_pM kümesi,

i) $(V_p + W_p)(f) = V_p(f) + W_p(f)$

ii) $(aV_p)(f) = aV_p(f)$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle beraber $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına da M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörleri denir (Salimov ve Mağden

2008). Burada $V, W \in T_pM$ ve $a \in \mathbb{R}$ dir. Manifoldun bir p noktasındaki tanjant uzayı ile Öklid uzayı izomorfik olduğundan tanjant uzayın boyutu manifoldun boyutuna eşittir.

Sonuç 1: M, n-boyutlu düzgün bir manifold olmak üzere, $p \in M$ ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $V_p \in T_pM$ tanjant vektörü için,

i) $V_p(af + bg) = aV_pf + bV_pg$

ii) $V_p(fg) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g)$

yazılır (Hicks 1971; O'Neill 1983).

Teorem 1: (T_pM), n-boyutlu M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı ve p noktasının $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki koordinatları $(x^1, \dots, x^n)$ olsun. Bu durumda T_pM vektör uzayının bir bazı $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \right\}$ dir.

Tanım 10: Teorem 1'de verilen $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \right\}$ bazına M manifoldunun p noktasındaki doğal çatısı denir.

Kısalığın hatırı için $\sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ yazılışını $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ şeklinde göstereceğiz. $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ yazılışındaki i indisi toplam indisi adını alır. Benzer olarak $\frac{\partial}{\partial x^i}$ bazı ise $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 11: M manifoldunun her bir p noktasına, T_pM tanjant uzayından bir tanjant vektör karşılık getiren C^{∞} sınıfından bir fonksiyona M üstünde bir vektör alanı denir. Böylece M manifoldu üzerinde bir V vektör alanı,

$$V: M \to \bigcup_{p \in M} (T_pM)$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir bir dönüşümdür (Şahin 2012).

Aslında vektör alanı büyük bir tanjant vektör kolleksiyonu olup M manifoldunun her bir noktasında bir tanjant vektöre sahiptir. Burada vektör alanının diferensiyellenebilir olması, $\forall\ f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} Vf: M &\to \mathbb{R} \\ p &\to (Vf)(p) = V_p(f) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonun her mertebeden diferensiyellenebilir olması anlamındadır.

Vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{I}_0^1(M)$ ile gösterilecektir. Lokal koordinat sisteminde bir V vektör alanı,

$$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

olarak ifade edilir (Şahin 2012).

$\mathfrak{I}_0^1(M)$, M manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olsun. $p \in M$ olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ ve $\forall\, f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için, $\mathfrak{I}_0^1(M)$ kümesi

i) $(X + Y)_p(f) = X_p(f) + Y_p(f)$

ii) $(gX)_p(f) = g(p)X_p(f)$

şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile beraber $C^\infty(M, \mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modüldür.

Kotanjant Vektörler ve 1-Formlar

Tanım 12 : M, n-boyutlu bir manifold ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, f fonksiyonunun $p \in M$ noktasındaki diferensiyeli,

$$(df)|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p dx^i$$

biçiminde tanımlanır. $\forall\, f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}$ için, $f + g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun diferensiyeli $df + dg$ ve $af \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonun diferensiyeli de $a(df)$ şeklinde olup bu fonksiyonların $p \in M$ noktasındaki diferensiyelleri $\mathbb{R}$ üzerinde $(T_P M)^*$ uzayını oluşturur.

$x^i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ koordinat fonksiyonları için $dx^i \in (T_P M)^*$ olacağı aşikardır. $\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \in \mathbb{R}$ olduğundan, $\forall\, df \in (T_P M)^*$ diferensiyeli dx^i diferensiyellerinin lineer terkibi olur. dx^i diferensiyelleri, bağımsız x^i $(i = 1, \ldots, n)$ değişkenlerinin diferensiyelleri olduğundan dx^i ler de lineer bağımsız olacaktır. O halde $\{dx^i\} = \{dx^1, \ldots, dx^n\}$, $(T_P M)^*$ uzayının bir bazı olur. Dolayısıyla $boy((T_P M)^*) = n$ dir.

$\forall\, X \in T_p M$ için $(T_P M)^*$ uzayının keyfi df elemanı,

$$df : (T_p M) \to \mathbb{R}$$
$$X \to df(X) = X(f)$$

şeklinde bir lineer dönüşüm tayin eder. Bu eşitlikte $f = x^j$ ve $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ olarak alınırsa, $dx^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ elde edilir. Yani, $\{dx^j\}$ ve $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ bazları dual bazlar olup $\{dx^j\}$ bazına kobaz denir. Bu durumda $(T_P M)^*$ uzayı, $T_p M$ uzayının duali olur.

Tanım 13: M bir manifold ve $T_p M, p \in M$ noktasındaki tanjant uzay olsun. $T_p M$ vektör uzayının dual uzayı olan $(T_P M)^*$ uzayına M nin p noktasındaki kotanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına da kotanjant vektör (lineer form) veya kısaca kovektör denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 14: $T_p M$ vektör uzayının $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ çatısına, $(T_P M)^*$ uzayında karşılık gelen $\{dx^j\}$ bazına, yani

$$dx^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$$

şartını sağlayan $\{dx^j\} = \{dx^1, \ldots, dx^n\}$ kobazına $p \in M$ noktasındaki koçatı adı verilir.

Tanım 15: M manifoldunun her bir noktasına bir kovektör karşılık getiren dönüşüme kovektör alanı veya 1-form adı verilir.

Tensörler ve Tensör Alanları

Tanım 16: M, n-boyutlu bir manifold ve $T_p M$ ile $(T_p M)^*$ sırasıyla $p \in M$ noktasındaki tanjant ve kotanjant uzayı olsun. Bu durumda

$$t: \underbrace{T_p M \times \ldots \times T_p M}_{q} \times \overbrace{(T_p M)^* \times \ldots \times (T_p M)^*}^{p} \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{x_j} \in T_p M,\ j = 1, \ldots, q$ vektör ve $\xi^i \in \left(T_p M\right)^*,\ \ i = 1, \ldots, p$ kovektör değişkenlerinin

$$t(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_q}, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p) = \lambda t(\vec{x}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_q}, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p)$$
$$+\mu t(\vec{y}, \overrightarrow{x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_q}, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p)$$

şartını sağlayan t dönüşümüne p. dereceden kontravaryant, q. dereceden kovaryant tensör adı verilir. (p, q) sıralı ikilisine ise tensörün tipi denir.

Tanım 17: Aynı tipli t_1 ve t_2 tensörlerinin toplamı,

$$(t_1 + t_2)(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_q}, \xi^1, \ldots, \xi^p) = t_1(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_q}, \xi^1, \ldots, \xi^p) + t_2(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_q}, \xi^1, \ldots, \xi^p)$$

şeklinde ve keyfi (p, q) tipli t tensörü ile $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısının çarpımı,

$$(\lambda t)(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_q},\xi^1,\dots,\xi^p) = \lambda t(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_q},\xi^1,\dots,\xi^p)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 18: M manifoldunda tanımlı tüm (p,q) tipli tensörlerin kümesini $T_q^p(M)$ ile gösterelim. $T_q^p(M)$ kümesi, Tanım 17'de tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile beraber bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Bu vektör uzayına tensör uzayı denir ve $T_q^p(M)$ ile gösterilir.

Tanım 19: Keyfi (p,q) ve (r,s) tipli t_1 ve t_2 tensörlerini göz önüne alalım. Bu tensörlerin çarpımı $(p+r,q+s)$ tipli $t_1 \otimes t_2$ tensörüdür. Bu tensör çarpımı

$$(t_1 \otimes t_2)(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_q,\vec{x}_{q+1},\dots,\vec{x}_{q+s},\xi^1,\dots,\xi^p,\xi^{p+1},\dots,\xi^{p+r})$$

$$= t_1(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_q,\xi^1,\dots,\xi^p)\, t_2(\vec{x}_{q+1},\dots,\vec{x}_{q+s},\xi^{p+1},\dots,\xi^{p+r})$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 20: M**,** n-boyutlu bir manifold ve $(T_pM)^*$ uzayı da T_pM vektör uzayının dual vektör uzayı olsun. $T_q^p(M)$, M üzerindeki (p,q) tipli tensörlerin uzayı olmak üzere,

$$C_j^i : T_q^p(M) \to T_{q-1}^{p-1}(M)$$

$$A \to (C_j^i A)(\partial_1,\dots,\partial_{p-1},dx^1,\dots,dx^{q-1}) = C\{A(.,\partial_1,\dots,\partial_{p-1},\dots,.,dx^1,\dots,dx^{q-1})\}$$

ve

$$C_j^i A = \sum_m A(\partial_m,\partial_1,\dots,\partial_{p-1},dx^m,dx^1,\dots,dx^{q-1})$$

ile tanımlanan operatöre kontraksiyon (daraltma) operatörü denir. Burada $\partial_m,\partial_1,\dots,\partial_{p-1}$ ler T_pM de baz ve $dx^m,dx^1,\dots,dx^{q-1}$ ler ise $(T_pM)^*$ de kobaz vektörleridir. Böylece kontraksiyon operatörü $(p\,,q)$ tipli bir tensörü $(p-1\,,q-1)$ tipli bir tensöre dönüştürür (Şahin 2012).

Tanım 21: t**,** q.mertebeden kovaryant bir tensör olsun. $v_1,v_2,\dots,v_q \in T_p(M)$ ve σ permütasyonu için,

i) $t(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\dots,v_{\sigma(q)}) = t(v_1,v_2,\dots,v_q)$ ise t ye kovaryant simetrik tensör,

ii) $t(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\dots,v_{\sigma(q)}) = (\mathrm{sgn}\sigma)\, t(v_1,v_2,\dots,v_q)$ ise t ye kovaryant anti-simetrik tensör adı verilir.

Kontravaryant tensörler içinde simetrik ve anti-simetrik tensör tanımı benzer biçimde yapılabilir (Şahin 2012).

Tanım 22: $(p\,,q)$ tipli bir tensör hem kovaryant simetrik hem de kontravaryant simetrik ise simetrik tensör adını alır (Bishop and Goldberg 1968).

Tanım 23: $w = t(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_q}, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)$ multilineer fonksiyonu ile M de (p, q) tipli t tensörü verilsin. $\partial_i \in T_pM$ baz ve $dx^j \in (T_pM)^*$ dual kobaz vektörleri için,

$$t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = t(\partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_q}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_p})$$

izlerine t tensörünün $\{\partial_i\}$ bazındaki koordinatları denir. Eğer $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)$ fonksiyonları C^∞ sınıfından ise t tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir.

Tanım 24: M, diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere manifoldun her $m \in M$ noktasına $T_q^p(M)$ tensör uzayından $(p\,,q)$ tipli bir tensör karşılık getiren

$$t: M \to T_q^p(M)$$

$$m \to t_q^p(m) \in T_q^p(M)$$

dönüşümüne $(p\,,q)$ tipli tensör alanı adı verilir (Bishop and Goldberg 1968).

Bu tanımdan hareketle,

- $p = 1\,, q = 0$ iken $(1\,,0)$ tipli tensör alanı olan vektör alanı,
- $p = 0\,, q = 1$ iken $(0, 1)$ tipli tensör alanı olan kovektör alanı (1-form) elde edilir.
- $p = 0\,, q = 0$ iken $\forall\, m \in M$ noktasına skaler bir değer karşılık gelir. Yani $(0\,,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Dolayısıyla vektör alanların kümesi $\Im_0^1(M)$, kovektör alanlarının kümesi $\Im_1^0(M)$ ve reel değerli fonksiyonların kümesi ise $\Im_0^0(M)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $U \subset M$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise $\forall\, m \in U$ için $df_{|m} \in \Im_{1|m}^0(M)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0{,}1)$ tipli bir tensör alanıdır.

M, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere bu manifold üzerindeki tüm $(p\,,q)$ tipli tensör alanlarının kümesi $T_q^p(M)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Tensör alanlarının toplamı,

$$\Im(M) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im_q^p\,(M)$$

şeklinde gösterilir. Eğer üçüncü bir işlem olarak tensörel çarpım işlemi $(\otimes)$ de dahil edilir ise $T_q^p(M)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir olur. Tensörel çarpım işlemi noktasal olarak

$$\underset{1}{t} \otimes \underset{2}{t} = \left(\underset{1}{t}\right)_m \otimes \left(\underset{2}{t}\right)_m, \qquad \forall\, m \in M \text{ ve } \forall\, \underset{1}{t}, \underset{2}{t} \in \Im(M)$$

biçiminde tanımlanır.

Tensör Diferensiyellemesi

Tanım 25: $\forall\, s, t \in \Im(M)$ ve $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlayan $D: \Im(M) \to \Im(M)$ dönüşümüne $\Im(M)$ cebirinin tensör diferensiyellemesi işlemi denir (O' Neill 1983).

i) $D(at + bs) = aD(t) + bD(s)$,

ii) $D\left(\Im_q^p(M)\right) \subset \Im_q^p(M)$,

iii) $D(t \otimes s) = D(t) \otimes s + t \otimes D(s)$,

iv) $D(Ct) = C(Dt)$.

Burada C kontraksiyon operatörüdür.

Lie Parantezi ve Lie Türevi

Tanım 26: M, C^∞ sınıfından bir manifold; M manifoldunun bir U açık kümesi üzerinde $X,\ Y \in \Im_0^1(M)$ ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$(Xf) = X^i \partial_i f \text{ ve } (Yf) = Y^j \partial_j f \tag{3}$$

iken

$$X(Yf) = X(Y^j \partial_j f) = X^i(\partial_i Y^j \partial_j f + Y^j \partial_{ij}^2 f),$$

$$Y(Xf) = Y(X^i \partial_i f) = Y^j(\partial_j X^i \partial_i f + X^i \partial_{ij}^2 f)$$

olur. Bu ifadeler kullanılarak

$$X(Yf) - Y(Xf) = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\, \partial_j f$$

şeklinde yeni bir vektör alanı elde edilir.

$$XY - YX = [X, Y]$$

ile tanımlanan bu vektör alanının ∂_i doğal çatısına göre ifadesi

$$[X, Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\, \partial_j \tag{4}$$

biçimindedir.

Tanım 27: (4) eşitliği ile tanımlanan $[X, Y]$ vektör alanına X ile Y vektör alanlarının Lie parantezi denir. (3) eşitliğinde (Xf), f fonksiyonun X vektör alanı yönündeki türevini ifade etmektedir (Salimov ve Mağden 2008).

(4) eşitliğinde, $\partial_i = \delta_i^k \partial_k$ ve $\partial_j = \delta_j^k \partial_k$ vektör alanları kullanılırsa

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

olduğu görülür.

Lie parantezi aşağıda verilen özelliklere sahiptir (Salimov ve Mağden 2008; Şahin 2012).

i) $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$ (Lineerlik)

ii) $[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y]$ (Leibniz şartı)

iii) $[X, Y] = -[Y, X]$ (Antisimetriklik)

iv) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi Özdeşliği)

Tanım 28: $\forall\, X, Y \in \Im_0^1(M)$ ve $\forall\, f \in \Im_0^0(M)$ olmak üzere, $D = L_X$ şeklinde gösterilen diferensiyelleme işlemi,

i) $L_X f = Xf$

ii) $L_X Y = [X, Y]$

şartlarını sağlarsa L_X e X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi denir (Kobayashi and Nomizu 1963).

(4) eşitliğine göre, $L_X Y$ vektör alanının lokal koordinatlardaki ifadesi,

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

şeklindedir. Lie diferensiyellemesi sonucu bulunan değere ise Lie türevi adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Keyfi (p, q) tipli t tensörünün Lie türevi,

$$L_X t_{\ j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = X^k \partial_k t_{\ j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^{q} (\partial_{j_\lambda} X^k)\, t_{\ j_1 \dots k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^{p} (\partial_k X^{i_\mu})\, t_{\ j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots k \dots i_p}$$

şeklindedir (Salimov ve Mağden 2008).

Afin (Lineer) Konneksiyon ve Kovaryant Türev

Tanım 29: M, C^{∞} sınıfından n-boyutlu bir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\Im_0^1(M)$ olmak üzere, $\forall\, X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ ve $\forall\, f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için

$$\nabla: \Im_0^1(M) \times \Im_0^1(M) \to \Im_0^1(M)$$

$$(X, Y) \to \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

işlemi,

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii) $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon; (M, ∇) çiftine ise afin konneksiyonlu uzay adı verilir (Hicks 1971; O' Neill 1983).

Tanım 30: ∇, C^{∞} sınıfından M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \Im_0^1(M)$, $\forall\, t \in \Im_q^p(M)$ ve $\forall\, f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için,

$$D = \nabla_X : \Im(M) \to \Im(M)$$

diferensiyelleme işlemi,

i) $\nabla_{fX+gY} t = f\nabla_X t + g\nabla_Y t$

ii) $\nabla_X f = Xf$

şartlarını sağlıyorsa, ∇_X e X vektör alanı yönündeki kovaryant türev adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 31: ∇, M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve (U, φ), M manifoldunun (x^i) lokal koordinatlarına sahip bir haritası olsun. $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ doğal vektör alanı olmak üzere, $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ gösterimini göz önüne alalım. ∇_{i} kovaryant türevi, ∂_j vektör alanına uygulanırsa

$$\nabla_{\mathrm{i}} \partial_j = \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} \partial_k$$

olacak şekilde yeni bir vektör alanı elde edilir. Burada $\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} = \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}(x)$, U koordinat komşuluğunda tayin edilmiş olan C^{∞} sınıfından fonksiyonlardır. $\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}$ fonksiyonlarına ∇ konneksiyonun katsayıları veya 2. tür Christoffel sembolleri denir.

İlk olarak bir vektör alanının kovaryant türevi koordinatlarla yazalım. $X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{X^i\partial_i}(Y^j\partial_j) = X^i\nabla_{\partial_i}(Y^j\partial_j)\\ &= X^i((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j\nabla_{\mathrm{i}}\partial_j)\\ &= X^i((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}\partial_k)\\ &= X^i(\partial_i Y^k + \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}Y^j)\partial_k\end{aligned}$$

olmak üzere $X = X^i\partial_i = \delta_s^i\partial_i = \partial_s$ (yani $X^i = \delta_s^i$) olarak alınırsa,

$$(\nabla_{\partial_s}Y)^k\partial_k = \delta_s^i(\partial_i Y^k + \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}Y^j)\partial_k$$

$$(\nabla_s Y)^k = \partial_s Y^k + \Gamma_{\mathrm{sj}}^{\mathrm{k}}Y^j \tag{5}$$

elde edilir. Bu ise Y vektör alanının kovaryant türevinin koordinatlarla ifadesidir.

İkinci olarak bir kovektör alanının kovaryant türevini koordinatlarla yazalım. $w \in \mathfrak{I}_1^0$ ve $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1$ için,

$$\begin{aligned}w(Y) = C_1^1(w\otimes Y) \Rightarrow \nabla_X(w(Y)) &= \nabla_X[C_1^1(w\otimes Y)]\\ &= C_1^1[\nabla_X(w\otimes Y)]\\ &= C_1^1[(\nabla_{\mathrm{X}}w)\otimes Y + w\otimes(\nabla_{\mathrm{X}}Y)]\\ &= (\nabla_{\mathrm{X}}w)Y + w(\nabla_{\mathrm{X}}Y)\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathrm{X}}w)Y &= \nabla_{\mathrm{X}}(w(Y)) - w(\nabla_{\mathrm{X}}Y)\\ &= X(w(Y)) - w(\nabla_{\mathrm{X}}Y)\end{aligned}$$

olup $X = \partial_i$ ve $Y = \partial_j$ yazılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathrm{i}}w)(\partial_j) &= \partial_i(w(\partial_j)) - w(\nabla_i\partial_j)\\ &= \partial_i w_j - w(\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}\partial_k)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\nabla_{\mathrm{i}}w_j = \partial_i w_j - \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}w_k \tag{6}$$

elde edilir.

Son olarak keyfi (p, q) tipli t tensörünün lokal koordinatlarda kovaryant türevi,

$$\nabla_{\mathrm{k}} t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} = \partial_k t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} + \sum_{\mu=1}^{p}\Gamma_{\mathrm{km}}^{\mathrm{i}_\mu}\, t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots m\dots i_p} - \sum_{\lambda=1}^{q}\Gamma_{\mathrm{kj}_\lambda}^{\mathrm{m}}\, t_{j_1\dots m\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$$

şeklindedir.

Burulma ve Eğrilik Tensörleri

(M,∇) afin konneksiyonlu uzayında $f \in C^{\infty}(U,\mathbb{R})$ fonksiyonun tam diferensiyelinin $df = \partial_i f dx^i$ şeklinde olduğu ve bir kovektör (1-form) belirttiği ifade edilmişti. df ye koordinatları $f_i = \partial_i f$ olan kovektör karşılık gelir. Schwarz teoremine göre f sürekli bir fonksiyon olduğundan f için ikinci türevler sıraya bağlı olmayıp yer değiştirebilir. Dolayısıyla,

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \Rightarrow \partial_i f_j = \partial_j f_i$$

yazılır. f_i nin kovektör olmasından dolayı yer değiştirme özelliğinin kovaryant türevler için de geçerli olup olmadığı düşünülebilir. (6) eşitliğinden

$$\nabla_{\mathrm{j}} f_i = \partial_j f_i - \Gamma_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}} f_k \ \text{ ve } \ \nabla_{\mathrm{i}} f_j = \partial_i f_j - \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} f_k$$

olmak üzere kovaryant türevlerin farkları alınırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathrm{j}} f_i - \nabla_{\mathrm{i}} f_j &= \partial_j f_i - \Gamma_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}} f_k - (\partial_i f_j - \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} f_k) \\ &= (\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} - \Gamma_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}}) f_k = T_{ij}^{k} f_k \end{aligned} \tag{7}$$

bulunur (Şuhubi 2008; Altunbaş 2014).

Tanım 32: (7) eşitliğindeki $(1,2)$ tipli $T_{ij}^{k} = \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} - \Gamma_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}}$ tensörüne ∇ konneksiyonun burulma tensörü adı verilir. ${T_{ij}}^{k} = -{T_{ji}}^{k}$ olduğu açıktır.

Burulma tensörü sıfır olan uzaylara burulmasız uzaylar adı verilir. Bu tür uzaylarda konneksiyon katsayıları

$${T_{ij}}^{k} = 0 \Leftrightarrow \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} - \Gamma_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}} = 0$$

olmak üzere simetriktir ($\Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}} = \Gamma_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}}$). Bu da ∇ konneksiyonunun simetrik olması anlamına gelir.

Burulma tensörünün invaryant formdaki yazılışı ise,

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \qquad \forall\, X,Y \in \mathfrak{I}_0^1(M)$$

şeklindedir (Kobayashi and Nomizu 1963; Hicks 1971). Dolayısıyla

$$T(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\mathrm{X}} Y - \nabla_{\mathrm{Y}} X = [X,Y]$$

olduğu görülür.

Yukarıda burulma tensörünü elde etmek için f fonksiyonuna uygulanan işlemler keyfi $v = v^i \partial_i$ vektörü için tatbik edilsin. (5) eşitliğinden $v = v^i \partial_i$ vektörünün kovaryant türevi $\nabla_{\mathrm{s}} v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{\mathrm{sk}}^{\mathrm{i}} v^k$ şeklinde olup $(1,1)$ tipli $\nabla_{\mathrm{s}} v^i$ kovaryant türevinin tekrar kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_{\mathrm{r}}\nabla_{\mathrm{s}}v^i = \partial_r\nabla_{\mathrm{s}}v^i + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rm}}\nabla_{\mathrm{s}}v^m - \Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{rs}}\nabla_{\mathrm{m}}v^i$$
$$= \partial_r(\partial_s v^i + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sk}}v^k) + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rm}}(\partial_s v^m + \Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{sk}}v^k) - \Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{rs}}\nabla_{\mathrm{m}}v^i$$
$$= \partial^2_{rs}v^i + (\partial_r\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sk}})v^k + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sk}}(\partial_r v^k) + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rm}}\partial_s v^m + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rm}}\Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{sk}}v^k - \Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{rs}}\nabla_{\mathrm{m}}v^i$$
$$= \partial^2_{rs}v^i + (\partial_r\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sk}} + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rm}}\Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{sk}})v^k + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sk}}(\partial_r v^k) + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rm}}\partial_s v^m - \Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{rs}}\nabla_{\mathrm{m}}v^i \tag{8}$$

ve benzer olarak

$$\nabla_{\mathrm{s}}\nabla_{\mathrm{r}}v^i = \partial^2_{sr}v^i + (\partial_s\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rk}} + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sm}}\Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{rk}})v^k + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rk}}(\partial_s v^k) + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sm}}\partial_r v^m - \Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{sr}}\nabla_{\mathrm{m}}v^i \tag{9}$$

bulunur. (8) eşitliğinden (9) eşitliğinin çıkarılmasıyla

$$\nabla_{\mathrm{r}}\nabla_{\mathrm{s}}v^i - \nabla_{\mathrm{s}}\nabla_{\mathrm{r}}v^i = (\partial_r\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sk}} - \partial_s\Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rk}} + \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{rm}}\Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{sk}} - \Gamma^{\mathrm{i}}_{\mathrm{sm}}\Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{rk}})v^k - (\Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{rs}}\nabla_{\mathrm{m}}v^i - \Gamma^{\mathrm{m}}_{\mathrm{sr}}\nabla_{\mathrm{m}}v^i)$$

olmak üzere

$$\nabla_{[\mathrm{r}}\nabla_{\mathrm{s}]}v^i = R_{rsk}{}^{i}v^k - T_{rs}{}^{k}\nabla_k v^i \tag{10}$$

elde edilir. Bu eşitliğe v^i vektör alanı için Ricci özdeşliği denir. Burada

$$R_{rsk}{}^{i} = \partial_r\Gamma^i_{sk} - \partial_s\Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^m_{rk} \tag{11}$$

şeklindedir (Şuhubi 2008; Altunbaş 2014).

Tanım 33: (10) da elde edilen $R_{rsk}{}^{i}$ tensörüne ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir. $\forall\, X, Y, Z \in \Im^1_0(M)$ için eğrilik tensörünün invaryant yazılımı

$$R(X,Y,Z) = [\nabla_{\mathrm{X}}, \nabla_{\mathrm{Y}}]Z - \nabla_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}Z$$
$$= \nabla_{\mathrm{X}}\nabla_{\mathrm{Y}}Z - \nabla_{\mathrm{Y}}\nabla_{\mathrm{X}}Z - \nabla_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}Z \tag{12}$$

şeklindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

(11) eşitliğinden

$$R(X,Y,Z) = -R(Y,X,Z)$$

olduğu görülür. Bu eşitliği koordinatlarla

$$R_{ijk}{}^{s} = -R_{jik}{}^{s}$$

veya

$$R_{(ij)k}{}^{s} = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Yani, eğrilik tensörü alttaki ilk iki indise göre antisimetriktir.

Teorem 2: M, C^∞ sınıfından bir manifold ve ∇, bu manifold üzerinde simetrik bir afin konneksiyon olsun. (M, ∇) burulmasız uzayında konneksiyonun R eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $R_{ijk}{}^{s} + R_{jki}{}^{s} + R_{kij}{}^{s} = 0$ (1. Bianchi özdeşliği)

ii) $\nabla_{l} R_{ijk}{}^{s} + \nabla_{j} R_{lik}{}^{s} + \nabla_{i} R_{jlk}{}^{s} = 0$ (2. Bianchi özdeşliği)

2. Bianchi özdeşliği, Bianchi-Padov özdeşliği olarak da bilinir.

Riemann Manifoldu

Tanım 34: C^∞ sınıfından bir M manifoldu üzerinde tanımlı,

$$g: \mathfrak{I}_0^1(M) \times \mathfrak{I}_0^1(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

g bilineer formu (veya (0,2) tipli tensörü) $\forall\, X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ için,

i) $g(X, Y) = g(Y, X)$ (simetriklik)

ii) $g(X, X) \geq 0$ ve $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = \vec{0}$ (pozitif tanımlılık)

şartlarını sağlarsa g ye Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. (M, g) ikilisine ise Riemann manifoldu denir (Yano and Kon 1984).

Eğer g nin pozitif tanımlı olması şartı "$\forall\, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ için $g(X, Y) = 0$ olması $X = 0$ olmasını gerektirir" şeklinde ifade edilen regülerlik (dejenere olmama, non-dejenere) şartı ile değiştirilirse g ye yarı-Riemann (pseudo-Riemann) metriği, (M, g) ikilisine ise yarı-Riemann (pseudo-Riemann) manifoldu denir (Kühnel 2005).

$X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$ olmak üzere g metrik tensörü koordinatlarla

$$g(X, Y) = g\left(X^i \partial_i, Y^j \partial_j\right) = g_{ij} X^i Y^j$$

olarak yazılır. Burada $g_{ij} = g\left(\partial_i, \partial_j\right)$ şeklinde olup $\{dx^i\}$, $\{\partial_i\}$ nin dual bazı olduğundan metrik tensör $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ olarak ifade edilebilir. Ayrıca regülerlik şartı koordinatlarla

$$g(X, Y) = g\left(X^i \partial_i, Y^j \partial_j\right) = g_{ij} X^i Y^j = 0$$

şeklinde ifade edilir. Şart her Y^j için sağlanacağından $g_{ij} X^i = 0$ dır. Bu denklem sisteminin $X^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olmalıdır. Burada (g_{ij}), g_{ij} tensörüne karşılık gelen matrisi göstermektedir.

Manifold üzerinde Riemann metriğinin tanımlı olması bir vektör alanının uzunluğunu ve iki vektör alanı arasındaki açıyı tanımlamayı mümkün kılmaktadır. Ayrıca bu metrik tensör ile manifold üzerinde tanımlı bir tensörün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri arasında geçiş yapılabilir.

(U,φ) haritasındaki $\{x^1,\ldots,x^n\}$ lokal koordinatlarına göre, g metriğinin kovaryant ve kontravaryant bileşenleri sırasıyla $g(\partial_i,\partial_j)=g_{ij}$ ve $g(dx^i,dx^j)=g^{ij}$ şeklinde olup

$$g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$$

olur.

Tanım 35: ∇, (M,g) Riemann manifoldu üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olmak üzere,

$$\nabla g=0$$

ise, ∇ konneksiyonuna metrik konneksiyon adı verilir (Yano and Kon 1984).

Teorem 3: (M,g) Riemann manifoldu üzerinde,

i) $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]=0$

ii) $\nabla g=0$

şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir afin konneksiyon vardır (Yano and Kon 1984).

Tanım 36: Teorem 3'te ifade edilen burulmasız metrik konneksiyona Levi-Civita veya Riemann konneksiyonu adı verilir (Yano and Kon 1984).

Teorem 4: (M,g) Riemann manifoldu ve $\forall\ X,Y,Z\in\Im_0^1(M)$ olmak üzere, Levi-Civita konneksiyonu olan ∇ için Koszul formülü adı verilen

$$2g(\nabla_X Y,Z)=Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)-g(X,[Y,Z])+g(Y,[Z,X])+g(Z,[X,Y])$$

denklemi geçerlidir. Bu denklemde $X=\partial_i$, $Y=\partial_j$, $Z=\partial_k$ alınırsa

$$\begin{aligned}2g\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_k\right)&=\partial_i g\left(\partial_j,\partial_k\right)+\partial_j g(\partial_k,\partial_i)-\partial_k g\left(\partial_i,\partial_j\right)-g(\partial_i,[\partial_j,\partial_k])+g(\partial_j,[\partial_k,\partial_i])\\&\quad+g(\partial_k,[\partial_i,\partial_j])\\&\Rightarrow 2g(\Gamma_{ij}^h\partial_h,\partial_k)=\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ki}-\partial_k g_{ij}\\&\Rightarrow 2\Gamma_{ij}^h g_{hk}=\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ki}-\partial_k g_{ij}\\&\Rightarrow \Gamma_{ij}^h=\frac{1}{2}g^{hk}(\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ki}-\partial_k g_{ij})\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan Γ_{ij}^h fonksiyonlarına Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları denir.

Tanım 37: ∇, (M,g) Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ için

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

olarak tanımlanan (1,3) tipli R tensörüne, Levi-Civita konneksiyonunun Riemann eğrilik tensörü adı verilir.

Tanım 38: Bir (M,g) Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü (R) sıfır ise M ye flat (düz) manifold denir (Wilkins 2005).

Herhangi bir afin konneksiyonun eğrilik tensörünün aksine, $(1,3)$ tipli Riemann eğrilik tensörünün kontravaryant indisi indirilerek $(0,4)$ tipli kovaryant tensör elde edilebilir. Yani,

$$R_{ijk}{}^{m} g_{ml} = R_{ijkl}$$

olur.

Teorem 5: (0,4) tipli Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$,

ii) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$,

iii) $R_{ijkl} = R_{klij}$,

iv) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$,

v) $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$.

Teorem 5'te $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ eşitliği

$$R_{ijk}{}^{m} g_{ml} + R_{ijl}{}^{m} g_{mk} = 0$$

olarak yazılıp eşitliğin her iki tarafı g^{lk} ile kontraksiyon yapılırsa

$$R_{ijk}{}^{m} \delta_m^k + R_{ijl}{}^{m} \delta_m^l = 0$$

olmak üzere

$$R_{ijk}{}^{k} = 0$$

özelliği elde edilir.

Tanım 39: (1,3) tipli $R_{ijk}{}^{l}$ eğrilik tensörüne kontraksiyon uygulanarak elde edilen $(0,2)$ tipli

$$C_1^1(R_{ijk}{}^{l}) = R_{ljk}^{\ \ \ l} = R_{jk}$$

tensörüne Ricci (eğrilik) tensörü denir (Kühnel 2005). Ayrıca Ricci tensörü simetriktir ($R_{jk} = R_{kj}$).

Tanım 40: Bir (M, g) Riemann manifoldunun $(0,2)$ tipli Ricci eğrilik tensörü R,

$$\nabla R = 0$$

şartını sağlarsa, (M, g) Riemann manifoldu lokal Ricci simetrik olur.

Tanım 41: Ricci tensörünün tam kontraksiyonu sonucu elde edilen tensöre, skaler eğrilik denir ve τ ile gösterilir. Buna göre,

$$\tau = g^{jk} R_{jk}$$

şeklindedir.

Riemann Manifoldu Üzerinde Bazı Vektör Alanları

Tanım 42: ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere $\forall\, X, Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$(L_V \nabla)(X, Y) = \theta(X)Y + \theta(Y)X$$

olacak şekilde bir θ 1-formu varsa V vektör alanına projektif vektör alanı veya infinitesimal projektif dönüşüm denir. Bu durumda θ, V nin bağlantılı 1-formu olarak adlandırılır. Bu durum lokal olarak

$$L_V \Gamma_{ij}^h = \theta_i \delta_j^h + \theta_j \delta_i^h$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca $\theta = 0$ ise V vektör alanı, infinitesimal afin dönüşüm olarak adlandırılır (Yamauchi 1998).

Tanım 43: (M, g) bir Riemann manifoldu ve $V \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere

$$L_V g = 0$$

ise V vektör alanına Killing vektör alanı veya infinitesimal izometri denir. Bu şart koordinatlarla

$$\begin{aligned}(L_V g)_{ij} &= V^\alpha \partial_\alpha g_{ij} + (\partial_i V^\alpha) g_{\alpha j} + \left(\partial_j V^\alpha\right) g_{i\alpha} \\ &= V^\alpha \nabla_\alpha g_{ij} + (\nabla_i V^\alpha) g_{\alpha j} + \left(\nabla_j V^\alpha\right) g_{i\alpha} \\ &= \nabla_i V_j + \nabla_j V_i \\ &= 0\end{aligned}$$

olarak ifade edilir (Yamauchi 1994).

Tanım 44: (M, g) bir Riemann manifoldu ve $V \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere

$$L_V g_{\alpha\beta} = (\nabla_\alpha V^\epsilon) g_{\epsilon\beta} + \left(\nabla_\beta V^\epsilon\right) g_{\epsilon\alpha} = 2\Omega g_{\alpha\beta}$$

olacak şekilde bir Ω skaler fonksiyonu varsa V vektör alanına konformal vektör alanı veya infinitesimal konformal dönüşüm denir.

Özel olarak,

- $\Omega = 0$ ise V vektör alanı metriği koruyan bir Killing vektör alanı,
- Ω sabitse V vektör alanı metriği düzgün bir şekilde ölçeklendiren homotetik bir dönüşüm oluşturur (Yamauchi and Hasegawa 2002).

Tanım 45: Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde lokal olarak $\varphi = \varphi^m \frac{\partial}{\partial x^m}$ şeklinde temsil edilen φ vektör alanı, aşağıdaki koşul altında bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı olarak tanımlanır:

$$\nabla(\overline{\varphi}) = \gamma Ric.$$

Burada γ sıfırdan farklı bir skaler fonksiyon; ∇, g nin Riemann konneksiyonu; Ric, (M, g) nin Ricci tensörü ve $g(\varphi, \xi) = \overline{\varphi}\xi$ şeklindedir. Denklem lokal olarak şu şekilde ifade edilir:

$$\nabla_j \overline{\varphi}_i = \gamma R_{ij}.$$

Burada $\overline{\varphi}_i = g_{im}\varphi^m$ ve R_{ij}, Ricci tensörünü göstermektedir (Hinterleitner and Kiosak 2008).

Tanım 46: (M, g) Riemann manifoldu üzerinde herhangi bir Z vektör alanı için

$$\nabla_Z V = \alpha Z$$

şartını sağlayan V vektör alanına concurrent (eş zamanlı) vektör alanı denir. Burada ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu; α ise düzgün bir fonksiyonu göstermektedir (Brickell and Yano 1974).

Tanım 47: (M, g) Riemann manifolduna ait olan bir V vektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_Z V = 0, \qquad \forall\, Z \in \mathfrak{I}_0^1(M)$$

koşulunu sağlıyor ise, V vektör alanına paralel vektör alanı denir.

Riemann Manifoldu Üzerinde Bazı Soliton Yapılar

Tanım 48 (Ricci Soliton): Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki düzgün bir V vektör alanı,

$$\frac{1}{2} L_V g + Ric = \lambda g \tag{13}$$

şartını sağlıyorsa (M, g) Riemann manifoldu Ricci soliton olarak adlandırılır ve (M, g, V, λ) şeklinde gösterilir. Burada $L_V g$, Riemann metriği g nin V ye göre Lie türevi; Ric, (M, g) nin Ricci tensörü ve λ bir sabittir. V vektör alanına Ricci solitonunun potansiyel vektör alanı denir.

Bir $(\mathrm{M}, g, V, \lambda)$ Ricci solitonu $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ veya $\lambda < 0$ olmasına bağlı olarak büzülen, sabit veya genişleyen olarak adlandırılır.

Tanım 49 (Genelleştirilmiş Ricci-Yamabe Soliton): Boyutu $n > 2$ olan bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki düzgün bir V vektör alanının

$$L_V g + 2\alpha Ric = (2\lambda - \beta\tau)g + 2\rho V^{\#} \otimes V^{\#} \tag{14}$$

şartını sağlıyorsa bir genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton tanımladığı söylenir. Burada $\lambda, \alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}$ ve $V^{\#}, V$ vektör alanının dualidir. Bu kavram, soliton benzeri denklemlerin geniş bir sınıfını kapsayan bir genelleme sağlar.

Tanım 50 (Riemann Soliton): (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki düzgün bir X vektör alanının, aşağıdaki şartı sağlıyorsa bir Riemann soliton tanımladığı söylenir:

$$Riem + \frac{1}{2} g \wedge L_X g = \lambda G.$$

Burada L_X, X vektör alanı boyunca Lie türevi; λ bir sabit ve $Riem$, g nin Riemann eğrilik tensörüdür. Böyle bir X vektör alanına soliton potansiyeli denir. Ayrıca, Riemann eğrilik tensörü $Riem = R_{ijkl}$ ve $G = G_{ijkl} = g \wedge g = g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}$ şeklindedir.

MATERYAL VE YÖNTEM

Tanjant Demet

Tanım 51: M, C^∞ sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı T_pM olmak üzere,

$$TM = \bigcup_{p\in M} (T_pM)$$

şeklinde tanımlanan TM kümesine, M manifoldu üzerindeki tanjant demet denir.

TM tanjant demetin $\tilde{p} \in T_pM$ olacak şekilde herhangi bir $\tilde{p}$ noktası için

$$\begin{aligned} \pi: TM &\to M \\ \tilde{p} &\to \pi(\tilde{p}) = p \end{aligned}$$

olacak şekilde tanjant demet, doğal bir izdüşüm haritası ile donatılmıştır. Bu harita her $\tilde{p} \in TM$ elemanını bulunduğu nokta ile ilişkilendirir. $\pi^{-1}(p) = \tilde{p} \in T_pM$ kümesine ise M baz manifoldunun p noktasındaki fibresi adı verilir (Yano and Ishihara 1973).

(x^h), U koordinat komşuluğundaki lokal koordinatlar olmak üzere; M baz manifoldu $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtülmüş olsun. $\pi^{-1}(U) \subset TM$ açık kümesi için $\psi: \pi^{-1}(U) \subset TM \to U \times \mathbb{R}^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir bir homeomorfizm olur. Burada $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerindeki n-boyutlu vektör uzayıdır.

$\tilde{p} \in T_pM$ noktası, (p, v) sıralı çifti ile gösterilir. $v \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri, $\left\{\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\right\}$ doğal bazına göre T_pM tanjant uzayındaki $\tilde{p}$ noktasının $(y^h) = (x^{\bar{h}})$, $(\bar{h} = n+1, \dots, 2n)$ kartezyen koordinatları ile verilir. Yani $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü,

$$v = y^h \partial_{\bar{h}} = x^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}}$$

şeklinde yazılabilir.

U koordinat komşuluğundaki $p = \pi(\tilde{p})$ noktasının koordinatları (x^h), $(h = 1, \dots, n)$ ile gösterilir ve $(x^h, y^h) \mapsto \tilde{p}$ ilişkisi dikkate alınırsa $\pi^{-1}(U) \subset TM$ açık kümesinde (x^h, y^h) lokal koordinatlar sistemi elde edilir. Burada $(x^h, y^h) = (x^h, x^{\bar{h}})$ sistemine, (x^h) lokal koordinatlarından indirgenmiş (elde edilmiş) koordinatlar (veya $\pi^{-1}(U)$ daki indirgenmiş koordinatlar) denir.

Dolayısıyla tanjant demet

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$$

şeklinde gösterilebilir. İzdüşüm haritası da $\pi : TM \to M$, $\pi : (p, v) \to p$ olarak verilir.

M manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfından (r, s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(M)$ ve M deki tüm tensör alanlarının kümesi de $\Im(M) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im_s^r(M)$ olarak gösterilsin. Benzer olarak TM tanjant demetindeki (r, s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(TM)$ ve TM deki tüm tensör alanlarının kümesi de $\Im(TM)$ ile gösterilecektir (Yano and Ishihara 1973).

Fonksiyonun Dikey (Vertikal) Lifti

Tanım 52: f, M de bir fonksiyon olsun. $f : M \to \mathbb{R}$ ve $\pi : TM \to M$ olmak üzere,

$$^V f = f \circ \pi, \ ^V f : TM \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun dikey lifti denir.

$\tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ noktasının indirgenmiş koordinatları $\tilde{p} = (x^i, y^i) = (x^i, x^{\bar{i}})$ olmak üzere,

$$^V f(\tilde{p}) = \ ^V f(x, y) = f \circ \pi(\tilde{p}) = f(p) = f(x)$$

olacağından $^V f(\tilde{p})$ değeri her bir fibre boyunca sabittir ve $p = \pi(\tilde{p}) \in M$ noktasındaki $f(p)$ değerine eşittir (Yano and Ishihara 1973).

Tanjant demette farklı bir şekilde de fonksiyon tanımlanabilir. $\omega \in \Im_1^0(M)$ olmak üzere, ι operatörü kullanılarak TM tanjant demette $\iota\omega$ fonksiyonu yazılsın. M nin bir U koordinat komşuluğunda ω lokal olarak $\omega = \omega_i dx^i$ şeklinde ifade edilebildiğine göre, $\pi^{-1}(U) \subset TM$ deki indirgenmiş koordinatlara göre $\iota\omega \in \Im_0^0(T(M))$ fonksiyonu,

$$\iota\omega = \omega_s y^s$$

olarak yazılır. Böylece f, M de bir fonksiyon ise $df \in \Im_1^0(M)$ olmak üzere, $\iota(df)$ fonksiyonu $\pi^{-1}(U) \subset TM$ deki indirgenmiş koordinatlara göre,

$$\iota(df) = (\partial_s f) y^s$$

şeklinde ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

Vektör Alanının Dikey (Vertikal) Lifti

Tanım 53 (Dikey Vektör Alanı): $\tilde{X} \in \Im_0^1(TM)$ ve $\forall f \in \Im_0^0(M)$ için $\tilde{X} \ ^V f = 0$ ise $\tilde{X}$ e dikey vektör alanı denir. $\tilde{X}$ vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $\begin{pmatrix} \tilde{X}^i \\ \tilde{X}^{\bar{i}} \end{pmatrix}$ olmak üzere, bileşenler

$$\tilde{X} \ ^V f = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{X}^{i}\partial_{i}\ {}^{V}f + \tilde{X}^{\bar{\imath}}\partial_{\bar{\imath}}\ {}^{V}f = 0$$
$$\Rightarrow \tilde{X}^{i}\partial_{i}f + \tilde{X}^{\bar{\imath}}\partial_{\bar{\imath}}f = 0$$
$$\Rightarrow \tilde{X}^{i} = 0, \quad \tilde{X}^{\bar{\imath}} \neq 0$$

olarak bulunur. Yani, $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^{i} \\ \tilde{X}^{\bar{\imath}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{\imath}} \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Tanım 54 (Vektör Alanının Dikey Lifti): $X \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ ve $\omega \in \mathfrak{I}_1^0(M)$ olmak üzere TM tanjant demette,

$${}^{V}X(\iota\omega) = {}^{V}(\omega(X))$$

şeklinde tanımlanan ${}^{V}X$ vektör alanına, X vektör alanının dikey lifti denir. ${}^{V}X$ vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$\begin{aligned}
&{}^{V}X(\iota\omega) = {}^{V}(\omega(X)) \\
&\qquad \Rightarrow\ {}^{V}X^{J}\partial_{J}(\iota\omega) = {}^{V}(\omega_j X^j) \\
&\qquad \Rightarrow\ {}^{V}X^{j}\partial_{j}(\omega_s y^s) + {}^{V}X^{\bar{\jmath}}\partial_{\bar{\jmath}}(\omega_s y^s) = \omega_j X^j \\
&\qquad \Rightarrow {}^{V}X^{j}((\partial_j\omega_s)y^s + \omega_s(\partial_j y^s)) + {}^{V}X^{\bar{\jmath}}((\partial_{\bar{\jmath}}\omega_s)y^s + \omega_s(\partial_{\bar{\jmath}} y^s)) = \omega_j X^j \\
&\qquad \Rightarrow {}^{V}X^{j} = 0, \quad {}^{V}X^{\bar{\jmath}} = X^j
\end{aligned}$$

olmak üzere

$${}^{V}X = \begin{pmatrix} {}^{V}X^{j} \\ {}^{V}X^{\bar{\jmath}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{j} \end{pmatrix} \tag{15}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

Tensör Alanlarının Dikey Lifti

M manifoldu üzerindeki keyfi $P, Q, R \in \mathfrak{I}(M)$ tensör alanlarının dikey lifti,

$${}^{V}(P \otimes Q) = {}^{V}P \otimes {}^{V}Q, \qquad {}^{V}(P + R) = {}^{V}P + {}^{V}R$$

şartlarını sağlayacak şekilde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

γ Operatörü

$S \in \mathfrak{I}_{q+1}^{p}(M)$ tensör alanı koordinatlarla,

$$S = S_{l\,j_1 \ldots j_q}^{\ \ i_1 \ldots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{l} \otimes dx^{j_1} \ldots \otimes dx^{j_q}$$

olarak verilsin. $\pi^{-1}(U)$ da (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlarına göre γ operatörü,

$$\gamma_X S = (X^l S_{l\, j_1 \dots j_q}^{\;i_1 \dots i_p})\ \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \dots \otimes dx^{j_q}$$

ve

$$\gamma\, S = (y^l S_{l\, j_1 \dots j_q}^{\;i_1 \dots i_p})\ \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \dots \otimes dx^{j_q}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\gamma_X S$ ve $\gamma\, S$, TM tanjant demette birer tensör alanıdır. Eğer $S \in \Im_0^0(M) \Rightarrow \gamma_X S = \gamma S = 0$ olarak kabul edilir (Yano and Ishihara 1973).

Fonksiyonun Tam (Complete) Lifti

Tanım 55: M manifoldu üzerinde $f: M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. TM tanjant demette,

$$^{C}f = \iota(df)$$

ile tanımlanan ^{C}f fonksiyonuna f fonksiyonunun tam lifti denir. ^{C}f fonksiyonu indirgenmiş koordinatlara göre lokal olarak

$$^{C}f = \iota(df) = y^s(\partial_s f) = \partial f$$

şeklinde ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

Vektör Alanının Tam (Complete) Lifti

Tanım 56: $X \in \Im_0^1(M)$ ve $f \in \Im_0^0(M)$ fonksiyonu için TM tanjant demette,

$$^{C}X\ ^{C}f =^{C} (Xf)$$

olarak tanımlanan $^{C}X \in \Im_0^1(TM)$ vektör alanına, X vektör alanının tam lifti denir. ^{C}X vektör alanının $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$^{C}X = \begin{pmatrix} ^{C}X^i \\ ^{C}X^{\bar{\imath}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^i \\ y^s \partial_s X^i \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

Tensör Alanlarının Tam Lifti

M manifoldu üzerindeki keyfi $P, Q, R \in \Im(M)$ tensör alanlarının tam lifti,

$$^{C}(P \otimes Q) = {}^{C}P \otimes {}^{V}Q + {}^{V}P \otimes {}^{C}Q, \qquad ^{C}(P + R) = {}^{C}P + {}^{C}R$$

şartlarını sağlayacak şekilde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

$(0, 2)$ Tipli Tensör Alanlarının Tam Lifti

M manifoldu üzerindeki $G \in \Im_2^0(M)$ tensör alanının tam lifti,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}G &= {}^{C}(G_{ij}dx^i \otimes dx^j) \\
&= {}^{C}(G_{ij})\ {}^{V}(dx^i \otimes dx^j) + {}^{V}(G_{ij})\ {}^{C}(dx^i \otimes dx^j) \\
&= {}^{C}(G_{ij})\,(\,{}^{V}dx^i \otimes {}^{V}dx^j) + {}^{V}(G_{ij})\,(\,{}^{C}dx^i \otimes {}^{V}dx^j + {}^{V}dx^i \otimes {}^{C}dx^j) \\
&= (y^s\partial_s G_{ij})\, dx^i \otimes dx^j + G_{ij}\,(dx^{\bar{\imath}} \otimes dx^j + dx^i \otimes dx^{\bar{\jmath}}) \\
&= (y^s\partial_s G_{ij})\, dx^i \otimes dx^j + (G_{ij})\, dx^{\bar{\imath}} \otimes dx^j + (G_{ij})\, dx^i \otimes dx^{\bar{\jmath}}
\end{aligned}
$$

bileşenlerine sahiptir. Yani,

$$
{}^{C}G = \begin{pmatrix} y^s\partial_s G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{16}
$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 6: M manifoldunda $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ şeklinde verilen g Riemann metriğinin TM tanjant demette ${}^{C}g$ tam lifti,

$$
{}^{C}g = 2g_{ij}\delta y^i dx^j
$$

şeklindedir. Burada $\delta y^i = dy^i + \left\{ {i \atop l\ k} \right\} dx^l y^k$ ve $\left\{ {i \atop l\ k} \right\}$, g_{ij} nin Christoffel sembolleridir.

İspat : (16) eşitliğinde bileşenleri verilen $(0,2)$ tipli G tensör alanının tam liftinden hareketle $g \in \mathfrak{I}_2^0(M)$ Riemann metriğinin TM tanjant demette ${}^{C}g$ tam lifti,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}g &= (y^s\partial_s g_{ij})dx^i dx^j + g_{ij}dx^i dy^j + g_{ij}dy^i dx^j \\
&= (y^s\partial_s g_{ij})dx^i dx^j + 2g_{ij}dy^i dx^j
\end{aligned}
$$

şeklinde olup bu eşitlikte $\partial_s g_{ij} = \left\{ {h \atop s\ i} \right\} g_{hj} + \left\{ {h \atop s\ j} \right\} g_{ih}$ olduğu kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}g &= y^s(\left\{ {h \atop s\ i} \right\} g_{hj} + \left\{ {h \atop s\ j} \right\} g_{ih})dx^i dx^j + 2g_{ij}dy^i dx^j \\
&= 2g_{ij}\left\{ {i \atop l\ s} \right\} dx^l y^s dx^j + 2g_{ij}dy^i dx^j \\
&= 2g_{ij}(dy^i + \left\{ {i \atop l\ s} \right\} dx^l y^s)dx^j \\
&= 2g_{ij}\delta y^i dx^j
\end{aligned}
$$

elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

Fonksiyonun Yatay (Horizantal) Lifti

Tanım 57: ∇, M de bir afin konneksiyon olmak üzere, $f \in \mathfrak{I}_0^0(M)$ fonksiyonunun gradyanı ∇f şeklinde yazılabilir. Ayrıca tanımlanan γ operatörü ∇f gradyanına uygulanırsa,

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f) = y^s \partial_s f$$

olur. $f \in \Im_0^0(M)$ fonksiyonu için TM tanjant demette,

$${}^H f = {}^C f - \nabla_\gamma f$$

şeklinde tanımlanan ${}^H f$ fonksiyonuna, f in yatay lifti denir (Yano and Ishihara 1973). Ayrıca ${}^C f = y^s \partial_s f$ olup f fonksiyonunun yatay lifti,

$${}^H f = 0$$

bulunur.

Vektör Alanın Yatay (Horizantal) Lifti

Tanım 58: ∇, M de bir afin konneksiyon olmak üzere $X \in \Im_0^1(M)$ için,

$${}^H X = {}^C X - \nabla_\gamma X$$

ile tanımlanan H_X vektör alanına, X vektör alanının yatay lifti denir. Ayrıca $\nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X)$ dir. X vektör alanının ve ∇ afin konneksiyonun M deki lokal koordinatları sırasıyla X^h ve Γ_{ij}^h olmak üzere, TM tanjant demette C_X ve $\nabla_\gamma X$,

$${}^C X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix}, \qquad \nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix}$$

lokal bileşenlerine sahiptir. $\nabla_s X^h = \partial_s X^h + \Gamma_{si}^h X^i$ olmak üzere ${}^H X$ in bileşenleri,

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{si}^h X^i \end{pmatrix} \tag{17}$$

şeklinde bulunur (Yano and Ishihara 1973).

Adapte Olmuş Çatı

Adapte olmuş çatı, TM tanjant demette tensörlerle ilgili işlemlerin daha kullanışlı bir şekilde yapılmasına imkan veren bir yapıdır. (M, ∇) manifoldunun her bir $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluğunda

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \left(X_{(i)} = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

olarak alınırsa (15) ve (17) eşitliklerinden sırasıyla

$${}^H X_{(i)} = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ -y^s \Gamma_{sm}^h \delta_i^m \end{pmatrix} \Rightarrow {}^H X_{(i)} = \delta_i^h \partial_h - y^s \Gamma_{si}^h \partial_{\bar{h}} \Rightarrow {}^H X_{(i)} = \partial_i - y^s \Gamma_{si}^h \partial_{\bar{h}}$$

ve

$$ {}^{V}X_{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^h \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{V}X_{(i)} = 0.\partial_h + \delta_i^h.\partial_{\bar{h}} \Rightarrow {}^{V}X_{(i)} = \partial_{\bar{\imath}} $$

olacak şekilde $2n$-boyutlu vektör alanları elde edilir. Bu vektör alanları lineer bağımsız olup sırasıyla ∇ nın yatay dağılımını ve TM nin dikey dağılımını meydana getirir.$\{ {}^{H}X_{(i)}, {}^{V}X_{(i)} \}$ kümesine, ∇ konneksiyonuna “adapte olmuş çatı” denir.

$$ \begin{cases} E_i = {}^{H}X_{(i)} \\ E_{\bar{\imath}} = {}^{V}X_{(i)} \end{cases} $$

olarak alındığında adapte olmuş çatı $\{E_\lambda\} = \{E_i, E_{\bar{\imath}}\}$ şeklinde yazılır.

(x^h) lokal koordinatları ile verilen $X \in \Im_0^1(M)$ vektör alanının yatay$({}^{H}X)$, dikey $({}^{V}X)$ ve tam $({}^{C}X)$ liftleri adapte olmuş çatıya göre,

$$ {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{\mathrm{sm}}^{\mathrm{h}} X^m \end{pmatrix} $$

$$ \Rightarrow {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^i \delta_i^h \\ -X^i y^s \Gamma_{\mathrm{sm}}^{\mathrm{h}} \delta_i^m \end{pmatrix} $$

$$ \Rightarrow {}^{H}X = X^i \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_i^h \\ -y^s \Gamma_{\mathrm{si}}^{\mathrm{h}} \end{pmatrix}}_{E_i} $$

$$ \Rightarrow {}^{H}X = X^i E_i $$

$$ \Rightarrow H_X = \begin{pmatrix} X^i \\ 0 \end{pmatrix} $$

ve

$$ {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} $$

$$ \Rightarrow {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \delta_i^h \end{pmatrix} $$

$$ \Rightarrow {}^{V}X = X^i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^h \end{pmatrix}}_{E_{\bar{\imath}}} $$

$$ \Rightarrow {}^{V}X = X^i E_{\bar{\imath}} $$

$$ \Rightarrow {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix} $$

olmak üzere,

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} $$

$$ \Rightarrow {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^i \delta_i^h \\ y^s \partial_s (X^i \delta_i^h) \end{pmatrix} $$

$$\Rightarrow\ {}^{C}X = X^{i}\underbrace{\begin{pmatrix}\delta_i^h\\ -y^s\Gamma_{si}^{h}\end{pmatrix}}_{E_i} + y^s\nabla_s X^i \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ \delta_i^h\end{pmatrix}}_{E_{\bar{\imath}}}$$

$$\Rightarrow\ {}^{C}X = X^i E_i + y^s\nabla_s X^i E_{\bar{\imath}}$$

$$\Rightarrow\ {}^{C}X = \begin{pmatrix}X^i\\ y^s\nabla_s X^i\end{pmatrix}$$

olarak elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

Lemma 1: $\{E_\lambda\}$ adapte olmuş çatıda X vektör alanının ${}^{H}X$ yatay lifti, ${}^{V}X$ dikey lifti ve ${}^{C}X$ tam lifti sırasıyla şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} H_X &= X^i E_i,\\ V_X &= X^i E_{\bar{\imath}},\\ C_X &= X^i E_i + y^s\nabla_s X^i E_{\bar{\imath}}. \end{aligned} \tag{18}$$

Lemma 2: Lie parantezi, TM de adapte olmuş çatıya göre aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned} [E_{\bar{\jmath}}, E_{\bar{\imath}}] &= 0,\\ [E_j, E_{\bar{\imath}}] &= \Gamma_{ji}^{a} E_{\bar{a}},\\ [E_j, E_i] &= y^b R_{ijb}^{\ \ \ a} E_{\bar{a}}. \end{aligned}$$

Burada, ${R_{ijb}}^{a}$, M nin eğrilik tensörünün bileşenlerini gösterir (Yano and Ishihara 1973).

Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyon

Tanım 59: $\breve{\nabla}$, C^∞ sınıfından bir M manifoldu üzerinde tanımlı afin (lineer) konneksiyon olsun. $\forall\ X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ olmak üzere,

$$T(X,Y) = \breve{\nabla}_X Y - \breve{\nabla}_Y X - [X,Y]$$

olarak tanımlanan $\breve{\nabla}$ konneksiyonunun T burulma tensörü,

$$T = 0$$

ise $\breve{\nabla}$ ya simetrik konneksiyon;

$$T \neq 0$$

ise, $\breve{\nabla}$ ya simetrik olmayan konneksiyon adı verilir (Hicks 1971).

Tanım 60: $\breve{\nabla}$, (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere,

$$\breve{\nabla} g = 0$$

ise, $\breve{\nabla}$ konneksiyonuna metrik konneksiyon;

$$\breve{\nabla} g \neq 0$$

ise, $\breve{\nabla}$ konneksiyonuna metrik olmayan konneksiyon adı verilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 61: $\breve{\nabla}$, C^{∞} sınıfından (M,g) Riemann manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve $\forall\ X,Y \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere, $\breve{\nabla}$ konneksiyonunun T burulma tensörü,

$$T(X,Y) = u(Y)X - u(X)Y$$

şeklinde ise, $\breve{\nabla}$ ya semi-simetrik konneksiyon denir (Friedman and Schouten 1924; Pak 1969). Burada, $\rho \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere u,

$$u(X) = g(X,\rho)$$

şeklinde tanımlanan 1-formdur.

Tanım 62: $\breve{\nabla}$, C^{∞} sınıfından (M,g) Riemann manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve $\forall\ X,Y \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere, $\breve{\nabla}$ konneksiyonunun T burulma tensörü,

$$T(X,Y) = u(Y)(\phi X) - u(X)(\phi Y)$$

şeklinde ise, $\breve{\nabla}$ ya quarter-simetrik konneksiyon denir (Golab 1975). Burada, $\rho \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere u,

$$u(X) = g(X,\rho)$$

şeklinde tanımlanan 1-form ve $\phi \in \Im_1^1(M)$ dir. Eğer $\phi = id$ olarak alınırsa quarter-simetrik konneksiyon, semi-simetrik konneksiyona dönüşür. Bu nedenle quarter-simetrik konneksiyon kavramı, semi-simetrik konneksiyon fikrinin genelleştirilmiş hali olarak görülebilir.

Ayrıca ϕ tensörü

$$g(\phi X,Y) = R(X,Y)$$

şeklinde tanımlanan (1,1) tipli bir Ricci tensörü olarak alınırsa $\breve{\nabla}$ quarter-simetrik konneksiyona Ricci quarter-simetrik konneksiyon adı verilir.

Tanım 63: Tanım 62'de verilen $\breve{\nabla}$ konneksiyonu,

$$T(X,Y) = u(Y)(\phi X) - u(X)(\phi Y)$$

şartına ek olarak

$$\breve{\nabla} g = 0$$

özelliğine de sahipse, $\breve{\nabla}$ konneksiyonuna Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon adı verilir (Kamilya and De 1995).

Fibre Preserving (Fibre Koruyucu) Vektör Alanı

Tanım 64: $\tilde{V}$, $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre $\left(v^h, v^{\bar{h}}\right)$ bileşenlerine sahip TM üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer v^h bileşeni yalnızca (x^h) değişkenine bağlı ise $\tilde{V}$ vektör alanı fibre-preserving (fibre-koruyucu) vektör alanı olarak adlandırılır.

ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Tanjant Demette Tam Lift Metriğine Göre Riemann Konneksiyonun Katsayıları

$\widetilde{\nabla}$, TM tanjant demette Riemann konneksiyonunu göstersin. TM tanjant demette adapte olmuş çatıya göre Riemann konneksiyonunun katsayıları,

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}(E_{\gamma}\tilde{g}_{\varepsilon\beta} + E_{\beta}\tilde{g}_{\gamma\varepsilon} - E_{\varepsilon}\tilde{g}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}({\Omega_{\gamma\beta}}^{\alpha} + {\Omega^{\alpha}}_{\gamma\beta} + {\Omega^{\alpha}}_{\beta\gamma}) \tag{19}$$

eşitliği kullanılarak bulunur (Yano and Ishihara 1973). Burada,

$$[E_{\gamma}, E_{\beta}] = {\Omega_{\gamma\beta}}^{\alpha} E_{\alpha} \tag{20}$$

ve

$${\Omega^{\alpha}}_{\gamma\beta} = \tilde{g}^{\alpha\varepsilon}\tilde{g}_{\delta\beta}\,{\Omega_{\varepsilon\gamma}}^{\delta} \tag{21}$$

biçiminde olup göz önüne alınacak (yani sıfırdan farklı) ${\Omega_{\gamma\beta}}^{\alpha}$ elemanları ise,

$$\begin{aligned} {\Omega_{ji}}^{\bar{h}} = -{\Omega_{ij}}^{\bar{h}} = -{R_{jik}}^{h} y^{k}, \\ {\Omega_{j\bar{\imath}}}^{\bar{h}} = -{\Omega_{\bar{\imath}j}}^{\bar{h}} = \Gamma^{h}_{ji} \end{aligned} \tag{22}$$

şeklindedir. Ayrıca işlemlerimizde adapte olmuş çatıya göre kovaryant ve kontravaryant bileşenleri,

$$(\tilde{g}_{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } (\tilde{g}^{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

olarak verilen tam lift ($\tilde{g}$) metriği kullanılacaktır. O halde (19), (20), (22) ve (23) den tanjant demette $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}$ Riemann konneksiyonunun katsayıları,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{k}_{ij} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{k\varepsilon}(E_{i}\tilde{g}_{\varepsilon j} + E_{j}\tilde{g}_{i\varepsilon} - \underbrace{E_{\varepsilon}\tilde{g}_{ij}}_{0}) + \frac{1}{2}(\underbrace{{\Omega_{ij}}^{k}}_{0} + {\Omega^{k}}_{ij} + {\Omega^{k}}_{ji}) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}^{k\bar{h}}\left[\left(\partial_{i} - y^{s}\Gamma^{l}_{sj}\partial_{\bar{l}}\right)\tilde{g}_{\bar{h}j} + \left(\partial_{j} - y^{s}\Gamma^{l}_{sj}\partial_{\bar{l}}\right)\tilde{g}_{i\bar{h}}\right] + \frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{k\varepsilon}\tilde{g}_{Aj}\,\Omega^{A}_{\varepsilon i} + \tilde{g}^{k\varepsilon}\tilde{g}_{Ai}\,\Omega^{A}_{\varepsilon j}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{kh}\left(\partial_{i}g_{hj} + \partial_{j}g_{ih}\right) + \frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{k\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{a}j}\,\Omega^{\bar{a}}_{\bar{h}i} + \tilde{g}^{k\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{a}i}\,\Omega^{\bar{a}}_{\bar{h}j}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{kh}\left(\partial_{i}g_{hj} + \partial_{j}g_{ih}\right) - \frac{1}{2}g^{kh}\left(\underbrace{\Gamma^{a}_{ih}g_{aj} + \Gamma^{a}_{jh}g_{ai}}_{\partial_{h}g_{ij}}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{kh}\left(\partial_{i}g_{hj} + \partial_{j}g_{ih} - \partial_{h}g_{ij}\right) \\
&= \Gamma^{k}_{ij}
\end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\begin{array}{llll} 1)\ \tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} & & 5)\ \tilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^{k} = 0 & \\ 2)\ \tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{k} = 0 & & 6)\ \tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{k} = 0 & \\ 3)\ \tilde{\Gamma}_{ij}^{\bar{k}} = y^s R_{sij}{}^{k} & & 7)\ \tilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k} & (24) \\ 4)\ \tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = 0 & & 8)\ \tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = 0 & \end{array}$$

şeklinde elde edilir. Burada, Γ_{ij}^{k} katsayıları, M deki g_{ji} metriği ile şekillenen Christoffel sembollerini; $R_{sij}{}^{k}$ ise (M, g) manifoldunun eğrilik tensörüne ait bileşenleri göstermektedir.

Şimdi TM tanjant demette Hayden'in metodu yardımı ile bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon oluşturalım (Hayden 1932).

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyon

Tanjant demette konneksiyon katsayıları,

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + U_{\alpha\beta}^{\gamma} \tag{25}$$

şeklinde olan bir $\bar{\nabla}$ konneksiyonu olsun. Bu konneksiyonun tam lift metiğine göre bir metrik konneksiyon olabilmesi için $\bar{\nabla}_k \tilde{g}_{\alpha\beta} = 0$ olmalıdır. O halde,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_k \tilde{g}_{\alpha\beta} = 0 &\Rightarrow \partial_k \tilde{g}_{\alpha\beta} - \bar{\Gamma}_{k\alpha}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\sigma\beta} - \bar{\Gamma}_{k\beta}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\alpha\sigma} = 0 \\ &\Rightarrow \partial_k \tilde{g}_{\alpha\beta} - \left(\tilde{\Gamma}_{k\alpha}{}^{\sigma} + U_{k\alpha}{}^{\sigma}\right) \tilde{g}_{\sigma\beta} - \left(\tilde{\Gamma}_{k\beta}{}^{\sigma} + U_{k\beta}{}^{\sigma}\right) \tilde{g}_{\alpha\sigma} = 0 \\ &\Rightarrow \underbrace{\left(\partial_k \tilde{g}_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}_{k\alpha}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\sigma\beta} - \tilde{\Gamma}_{k\beta}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\alpha\sigma}\right)}_{\nabla_k \tilde{g}_{\alpha\beta}=0} - U_{k\alpha}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\sigma\beta} - U_{k\beta}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\alpha\sigma} = 0 \\ &\Rightarrow U_{k\alpha}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\sigma\beta} + U_{k\beta}{}^{\sigma} \tilde{g}_{\alpha\sigma} = 0 \end{aligned}$$

ve buradan

$$U_{k\alpha\beta} + U_{k\beta\alpha} = 0 \tag{26}$$

elde edilir. Yani, $(0,3)$ tipli U tensörü, alttaki son iki indise göre antisimetriktir.

Tanjant demette, $\tilde{\nabla}$ Riemann konneksiyonuna ve $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna ait burulma tensörleri sırasıyla,

$$0 = \tilde{T}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^{\gamma} - \Omega_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

ve

$$\bar{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\ \gamma} - \Omega_{\alpha\beta}^{\ \gamma}$$

şeklinde olup (25) eşitliği dikkate alınarak $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^{\gamma}$ farkına bakılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\ \gamma} &= \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} + U_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - \left(\tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\ \gamma} + U_{\beta\alpha}^{\ \gamma}\right) \\
&\Rightarrow \left(\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\ \gamma}\right) = \left(\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\ \gamma}\right) + U_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - U_{\beta\alpha}^{\ \gamma} \\
&\Rightarrow \bar{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \Omega_{\alpha\beta}^{\ \gamma} = \underbrace{\tilde{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}_{0} + \Omega_{\alpha\beta}^{\ \gamma} + U_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - U_{\beta\alpha}{}^{\gamma} \\
&\Rightarrow \bar{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = U_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - U_{\beta\alpha}{}^{\gamma}
\end{aligned}$$

olmak üzere γ yerine σ $(\gamma \to \sigma)$ yazılır ve üstteki σ indisi $g_{\sigma\gamma}$ ile aşağı indirilirse

$$\bar{T}_{\alpha\beta\gamma} = U_{\alpha\beta\gamma} - U_{\beta\alpha\gamma}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{\alpha\beta\gamma} &= U_{\alpha\beta\gamma} - U_{\beta\alpha\gamma} \\
\bar{T}_{\gamma\alpha\beta} &= U_{\gamma\alpha\beta} - U_{\alpha\gamma\beta} \\
\bar{T}_{\gamma\beta\alpha} &= U_{\gamma\beta\alpha} - U_{\beta\gamma\alpha}
\end{aligned}$$

olmak üzere son üç denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$\bar{T}_{\alpha\beta\gamma} + \bar{T}_{\gamma\alpha\beta} + \bar{T}_{\gamma\beta\alpha} = 2U_{\alpha\beta\gamma} \tag{27}$$

elde edilir. O halde $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} + U_{\alpha\beta}^{\ \gamma}$ olarak ifade ettiğimiz $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma}$ katsayılarını bulmak için $(1,2)$ tipli $U_{\alpha\beta}^{\ \gamma}$ tensörlerini belirlemeliyiz. $U_{\alpha\beta}^{\ \gamma}$ tensörleri ise $\bar{T}$ burulmasına bağlı olmakla beraber $\bar{\bar{\nabla}}$ nın Ricci quarter-simetrik bir konneksiyon olması için $\bar{T}$ burulması,

$$\bar{T}_{ij}^{\ \bar{k}} = y_j R_i^k - y_i R_j^k \tag{28}$$

olarak alınacaktır. Burada $y_i = y^s g_{si}$ şeklindedir. Ayrıca,

$$\bar{T}_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon} \tilde{g}_{\varepsilon\gamma} = \bar{T}_{\alpha\beta\gamma}$$

olmak üzere $(0,3)$ tipli burulma tensörleri $\bar{T}_{\alpha\beta\gamma}$,

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{ijk} &= \bar{T}_{ij}{}^{\varepsilon} \tilde{g}_{\varepsilon k} \\
&= \bar{T}_{ij}{}^{h} \underbrace{\tilde{g}_{hk}}_{0} + \bar{T}_{ij}{}^{\bar{h}} \tilde{g}_{\bar{h}k} \\
&= \left(y_j R_i^h - y_i R_j^h\right) g_{hk} \\
&= (y_j R_i^h) g_{hk} - (y_i R_j^h) g_{hk} \\
&= y_j R_{ik} - y_i R_{jk}
\end{aligned}$$

ve benzer olarak

1) $\bar{T}_{ijk} = y_j R_{ik} - y_i R_{jk}$ 5) $\bar{T}_{i\bar{j}k} = 0$

2) $\bar{T}_{ij\bar{k}} = 0$ 6) $\bar{T}_{i\bar{j}\bar{k}} = 0$

3) $\bar{T}_{\bar{i}jk} = 0$ 7) $\bar{T}_{\bar{i}\bar{j}k} = 0$

4) $\bar{T}_{\bar{i}j\bar{k}} = 0$ 8) $\bar{T}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = 0$

şeklindedir. (26) eşitliğinden (1,2) tipli ${U_{\alpha\beta}}^{\gamma}$ tensörleri,

$$2U_{ijk} = \bar{T}_{ijk} + \bar{T}_{kij} + \bar{T}_{kji}$$
$$2U_{ijk} = \left(y_j R_{ik} - y_i R_{jk}\right) + \left(y_i R_{kj} - y_k R_{ij}\right) + \left(y_j R_{ki} - y_k R_{ji}\right)$$
$$2U_{ijk} = 2\left(y_j R_{ik} - y_k R_{ij}\right)$$
$$U_{ijk} = \left(y_j R_{ik} - y_k R_{ij}\right)$$

olmak üzere $\left(\tilde{g}^{k\bar{h}} = g^{kh}\right)$ ile k indisi yukarı alınırsa

$$\left(U_{ijk}\right)\tilde{g}^{k\bar{h}} = \left(y_j R_{ik} - y_k R_{ij}\right) g^{kh}$$
$$U_{ij}^{\bar{h}} = (y_j R_{ik}) g^{kh} - (y_k R_{ij}) g^{kh}$$
$$U_{ij}^{\bar{h}} = y_j R_i^h - y^h R_{ij}$$

ve benzer olarak

1) ${U_{ij}}^{h} = 0$ 5) ${U_{i\bar{j}}}^{h} = 0$

2) ${U_{ij}}^{\bar{h}} = y_j R_i^h - y^h R_{ij}$ 6) ${U_{i\bar{j}}}^{\bar{h}} = 0$

3) ${U_{\bar{i}j}}^{h} = 0$ 7) ${U_{\bar{i}\bar{j}}}^{h} = 0$

4) ${U_{\bar{i}j}}^{\bar{h}} = 0$ 8) ${U_{\bar{i}\bar{j}}}^{\bar{h}} = 0$

biçiminde bulunur. (25) eşitliğinden $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun ${\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}}^{\gamma}$ katsayıları ise,

$$
\begin{array}{ll}
1)\ {\bar{\Gamma}_{ij}}^{k} = {\Gamma_{ij}}^{k} & 5)\ {\bar{\Gamma}_{ij}}^{\bar{k}} = y^s {R_{sij}}^{k} + y_j R_i^k - y^k R_{ij} \\
2)\ {\bar{\Gamma}_{\bar{i}j}}^{k} = 0 & 6)\ {\bar{\Gamma}_{\bar{i}j}}^{\bar{k}} = 0 \\
3)\ {\bar{\Gamma}_{i\bar{j}}}^{k} = 0 & 7)\ {\bar{\Gamma}_{i\bar{j}}}^{\bar{k}} = {\Gamma_{ij}}^{k} \\
4)\ {\bar{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}}^{k} = 0 & 8)\ {\bar{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}}^{\bar{k}} = 0
\end{array}
\qquad (29)
$$

olarak elde edilir. Bulunan bu konneksiyon katsayıları yardımıyla TM tanjant demette bir $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 7: (M,g) Riemann manifold ve $(TM,\tilde{g})$ de M nin tanjant demeti olsun. $(TM,\tilde{g})$ de bir $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon

$$\begin{cases} \overline{\nabla}_{E_i}E_j = \Gamma_{ij}^{k}E_k + \left\{y^s R_{sij}{}^{k} + y_j R_i^k - y^k R_{ij}\right\}E_{\bar{k}}, \\ \overline{\nabla}_{E_i}E_{\bar{j}} = \Gamma_{ij}^{k}E_{\bar{k}}\ , \\ \overline{\nabla}_{E_{\bar{i}}}E_j = 0, \\ \overline{\nabla}_{E_{\bar{i}}}E_{\bar{j}} = 0 \end{cases} \tag{30}$$

biçiminde tanımlanır. Burada Γ_{ij}^{k} ve $R_{sij}{}^{k}$ sırasıyla ∇ Levi-Civita konneksiyonunun katsayılarını ve M üzerindeki g pesudo-Riemann metriğinin Riemann eğrilik tensör alanını gösterir (Li et al. 2023).

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde verilen bir g pseudo-Riemannian metriği yardımıyla TM tanjant demet üzerinde bir diğer iyi bilinen klasik pseudo-Riemannian metrik

$$\hat{g}(X^H,Y^H) = g(X,Y),$$

$$\hat{g}(X^H,Y^V) = \hat{g}(X^V,Y^H) = g(X,Y),$$

$$\hat{g}(X^V,Y^V) = 0$$

şeklinde tanımlanan $I+II$ $(\hat{g})$ metriğidir. $\hat{g}$ metriği adapte olmuş çatıya göre

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir. $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre $I+II$ $(\hat{g})$ metriğinin kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_k\hat{g}_{ij} &= E_k\hat{g}_{ij} - \overline{\Gamma}_{ki}^{\ h}\hat{g}_{hj} - \overline{\Gamma}_{ki}^{\ \bar{h}}\hat{g}_{\bar{h}j} - \overline{\Gamma}_{kj}^{\ h}\hat{g}_{ih} - \overline{\Gamma}_{kj}^{\ \bar{h}}\hat{g}_{i\bar{h}} \\ &= (\partial_k - y^s\Gamma_{sk}^{h}\partial_{\bar{k}})g_{ij} - \Gamma_{ki}^{h}g_{hj} - (y^s R_{ski}{}^{h} + y_i R_k^h - y^h R_{ki})g_{hj} \\ &\quad -\Gamma_{kj}^{h}g_{ih} - (y^s R_{skj}{}^{h} + y_j R_k^h - y^h R_{kj})g_{ih} \\ &= \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^{h}g_{hj} - y^s R_{skij} - y_i R_{kj} + y_j R_{ki} - \Gamma_{kj}^{h}g_{ih} - y^s R_{skji} - y_j R_{ik} + y_i R_{kj} \\ &= \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^{h}g_{hj} - \Gamma_{kj}^{h}g_{ih} \\ &= \nabla_k g_{ij} = 0, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_k\hat{g}_{i\bar{j}} &= E_k\hat{g}_{i\bar{j}} - \overline{\Gamma}_{ki}^{\ h}\hat{g}_{h\bar{j}} - \overline{\Gamma}_{ki}^{\ \bar{h}}\underbrace{\hat{g}_{\bar{h}\bar{j}}}_{0} - \underbrace{\overline{\Gamma}_{k\bar{j}}^{\ h}}_{0}\hat{g}_{ih} - \overline{\Gamma}_{k\bar{j}}^{\ \bar{h}}\hat{g}_{i\bar{h}} \\ &= \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^{h}g_{hj} - \Gamma_{kj}^{h}g_{ih} \\ &= \nabla_k g_{ij} = 0 \end{aligned}$$

ile

$$\overline{\nabla}_k \hat{g}_{\bar{i}j} = E_k \hat{g}_{\bar{i}j} - \underbrace{\overline{\Gamma}_{k\bar{i}}^{\ h}}_{0} \hat{g}_{hj} - \overline{\Gamma}_{k\bar{i}}^{\ \bar{h}} \hat{g}_{\bar{h}j} - \overline{\Gamma}_{kj}^{\ h} \hat{g}_{\bar{i}h} - \overline{\Gamma}_{kj}^{\ \bar{h}} \underbrace{\hat{g}_{\bar{i}\bar{h}}}_{0}$$

$$= \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^{h} g_{hj} - \overline{\Gamma}_{kj}^{\ h} g_{ih}$$

$$= \nabla_k g_{ij} = 0$$

olur. Diğer bileşenler sıfırdır. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 8: (M, g) bir pseudo-Riemann manifold ve TM de M nin $\tilde{g}$ tam lift metriği veya $\hat{g}$ $(I + II)$ metriği ile donatılmış tanjant demeti olsun. $\tilde{g}$ tam lift metriğine göre tanımlanan $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon aynı zamanda $\hat{g}$ metriğine göre de bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon belirtir.

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyonun Eğrilik Tensörü

$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ katsayıları, adapte olmuş çatıya göre $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonunun bileşenleri olmak üzere,

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \ \sigma} = E_\alpha \overline{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\sigma} - E_\beta \overline{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\sigma} + \overline{\Gamma}_{\alpha\varepsilon}^{\ \ \sigma} \overline{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\varepsilon} - \overline{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^{\ \ \sigma} \overline{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\varepsilon} - \Omega_{\alpha\beta}^{\ \ \ \varepsilon} \overline{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}^{\sigma}$$

eşitliği, adapte olmuş çatıya göre $\overline{\nabla}$ nın $(1,3)$ tipli $\bar{R}$ eğrilik tensörünün bileşenlerini verir. Bu bileşenler,

$$\bar{R}_{i\,\bar{j}\,k}^{\ \ \ \ \bar{l}} = E_i \underbrace{\overline{\Gamma}_{\bar{j}\,k}^{\ \bar{l}}}_{0} - E_{\bar{j}} \overline{\Gamma}_{ik}^{\ \bar{l}} + \overline{\Gamma}_{i\varepsilon}^{\ \ \bar{l}} \underbrace{\overline{\Gamma}_{\bar{j}\,k}^{\ \varepsilon}}_{0} - \underbrace{\bar{\Gamma}_{\bar{j}\,\varepsilon}^{\ \ \bar{l}}}_{0} \bar{\Gamma}_{ik}^{\ \varepsilon} - \underbrace{\Omega_{i\,\bar{j}}^{\ \ \varepsilon} \bar{\Gamma}_{\varepsilon k}^{\ \bar{l}}}_{0}$$

$$= -\partial_{\bar{j}}\left(y^s R_{sik}^{\ \ \ l} + y_k R_i^l - y^l R_{ik}\right)$$

$$= -\left(\partial_{\bar{j}} y^s\right) R_{sik}^{\ \ \ l} - \left(\partial_{\bar{j}} y_k\right) R_i^l + \left(\partial_{\bar{j}} y^l\right) R_{ik}$$

$$= -\delta_j^s R_{sik}^{\ \ \ l} - \left[\partial_{\bar{j}}(g_{sk} y^s)\right] R_i^l + \delta_j^l R_{ik}$$

$$= -R_{jik}^{\ \ \ l} - \left[g_{sk}\left(\partial_{\bar{j}} y^s\right)\right] R_i^l + \delta_j^l R_{ik}$$

$$= -R_{jik}^{\ \ \ l} - g_{sk} \delta_j^s R_i^l + \delta_j^l R_{ik}$$

$$= R_{ijk}^{\ \ \ l} - g_{jk} R_i^l + \delta_j^l R_{ik}$$

ve benzer şekilde

$$
\begin{array}{ll}
1)\ \bar{R}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} & 9)\ \bar{R}_{ijk}{}^{\bar{l}} = y^s \nabla_s R_{ijk}{}^{l} \\
2)\ \bar{R}_{\bar{i}jk}{}^{l} = 0 & 10)\ \bar{R}_{\bar{i}jk}{}^{\bar{l}} = R_{ijk}{}^{l} + g_{ik} R_j^l - \delta_i^l R_{jk} \\
3)\ \bar{R}_{i\bar{j}k}{}^{l} = 0 & 11)\ \bar{R}_{i\bar{j}k}{}^{\bar{l}} = R_{ijk}{}^{l} - g_{jk} R_i^l + \delta_j^l R_{ik} \\
4)\ \bar{R}_{ij\bar{k}}{}^{l} = 0 & 12)\ \bar{R}_{ij\bar{k}}{}^{\bar{l}} = R_{ijk}{}^{l} \\
5)\ \bar{R}_{\bar{i}\bar{j}k}{}^{l} = 0 & 13)\ \bar{R}_{\bar{i}\bar{j}k}{}^{\bar{l}} = 0 \\
6)\ \bar{R}_{i\bar{j}\bar{k}}{}^{l} = 0 & 14)\ \bar{R}_{\bar{i}j\bar{k}}{}^{\bar{l}} = 0 \\
7)\ \bar{R}_{\bar{i}j\bar{k}}{}^{l} = 0 & 15)\ \bar{R}_{i\bar{j}\bar{k}}{}^{\bar{l}} = 0 \\
8)\ \bar{R}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}{}^{l} = 0 & 16)\ \bar{R}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}{}^{\bar{l}} = 0
\end{array}
\tag{31}
$$

olarak bulunur.

Teorem 9: $(TM, \tilde{g})$ tanjant demetin $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre $(1{,}3)$ tipli $\bar{R}$ eğrilik tensörü adapte olmuş çatıya göre

$$
\begin{array}{ll}
1)\ \overline{R}(E_i, E_j)E_k = R_{ijk}{}^{l} E_l + \{y^s \nabla_s R_{ijk}{}^{l}\} E_{\bar{l}} & 5)\ \overline{R}(E_{\bar{i}}, E_{\bar{j}})E_k = 0 \\
2)\ \overline{R}(E_i, E_j)E_{\bar{k}} = R_{ijk}{}^{l} E_{\bar{l}} & 6)\ \overline{R}(E_{\bar{i}}, E_j)E_{\bar{k}} = 0 \\
3)\ \overline{R}(E_i, E_{\bar{j}})E_k = \{R_{ijk}{}^{l} + R_{ik}\delta_j^l - g_{jk} R_i{}^{l}\} E_{\bar{l}} & 7)\ \overline{R}(E_i, E_{\bar{j}})E_{\bar{k}} = 0 \\
4)\ \overline{R}(E_{\bar{i}}, E_j)E_k = \{R_{ijk}{}^{l} + g_{ik} R_j{}^{l} - R_{jk}\delta_i^l\} E_{\bar{l}} & 8)\ \overline{R}(E_{\bar{i}}, E_{\bar{j}})E_{\bar{k}} = 0
\end{array}
\tag{32}
$$

şeklindedir.

Tam lift metriği $\tilde{g}$ ve $I{+}II$ metriği $\hat{g}$ nin Levi-Civita konneksiyonları çakıştığından, bu konneksiyonların Riemann eğrilik tensörleri de çakışır. $\tilde{g}$ metriğine göre (veya $\hat{g}$ metriğine göre) Levi-Civita konneksiyonunun Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$ aşağıdaki şekildedir:

$$
\begin{array}{ll}
1)\ \tilde{R}(E_i, E_j)E_k = R_{ijk}{}^{l} E_l + \{y^s \nabla_s R_{ijk}{}^{l}\} E_{\bar{l}} & 5)\ \tilde{R}(E_{\bar{i}}, E_{\bar{j}})E_k = 0 \\
2)\ \tilde{R}(E_i, E_j)E_{\bar{k}} = R_{ijk}{}^{l} E_{\bar{l}} & 6)\ \tilde{R}(E_{\bar{i}}, E_j)E_{\bar{k}} = 0 \\
3)\ \tilde{R}(E_i, E_{\bar{j}})E_k = R_{ijk}{}^{l} E_{\bar{l}} & 7)\ \tilde{R}(E_i, E_{\bar{j}})E_{\bar{k}} = 0 \\
4)\ \tilde{R}(E_{\bar{i}}, E_j)E_k = R_{ijk}{}^{l} E_{\bar{l}} & 8)\ \tilde{R}(E_{\bar{i}}, E_{\bar{j}})E_{\bar{k}} = 0
\end{array}
$$

$\tilde{g}$ tam lift metriğinin (veya $\hat{g}\,(I+II)$ metriğinin) $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona ve Levi-Civita konneksiyonuna göre eğrilik tensörlerini karşılaştırdığımızda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2: (M,g) bir pseudo-Riemann manifold ve TM de M nin $\tilde{g}$ tam lift metriği (veya $\hat{g}\ (I+II)$ metriği) ile donatılmış tanjant demeti olsun. $\tilde{g}$ tam lift metriğinin (veya $\hat{g}$ metriğinin) Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensörü ile Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonunun eğrilik tensörünün çakışması için $R_{ik}\delta_j^l - g_{jk}R_i{}^l = 0$ olmalıdır.

Ayrıca,

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma}\tilde{g}_{\sigma\mu} = \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\mu}$$

olmak üzere, $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $(0,4)$ tipli $\bar{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri ise,

$$\begin{array}{ll}
1)\ \bar{R}_{ijkh} = y^s\nabla_s R_{ijkh} & 9)\ \bar{R}_{\bar{\imath}jkh} = R_{ijkh} + g_{ik}R_{jh} - R_{jk}g_{ih} \\
2)\ \bar{R}_{ijk\bar{h}} = R_{ijkh} & 10)\ \bar{R}_{\bar{\imath}jk\bar{h}} = 0 \\
3)\ \bar{R}_{ij\bar{k}h} = R_{ijkh} & 11)\ \bar{R}_{\bar{\imath}j\bar{k}h} = 0 \\
4)\ \bar{R}_{ij\bar{k}\bar{h}} = 0 & 12)\ \bar{R}_{\bar{\imath}j\bar{k}\bar{h}} = 0 \\
5)\ \bar{R}_{i\bar{\jmath}kh} = R_{ijkh} - g_{jk}R_{ih} + R_{ik}g_{jh} & 13)\ \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}kh} = 0 \\
6)\ \bar{R}_{i\bar{\jmath}k\bar{h}} = 0 & 14)\ \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}k\bar{h}} = 0 \\
7)\ \bar{R}_{i\bar{\jmath}\bar{k}h} = 0 & 15)\ \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}h} = 0 \\
8)\ \bar{R}_{i\bar{\jmath}\bar{k}\bar{h}} = 0 & 16)\ \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}\bar{h}} = 0
\end{array} \tag{33}$$

şeklindedir.

Teorem 10: (M,g) bir Riemann manifold ve $(TM,\tilde{g})$ de M nin tanjant demeti olsun. $(TM,\tilde{g})$ de tanımlı $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $(0,4)$ tipli $\bar{R}$ eğrilik tensörü ilk iki indise göre antisimetriktir. Yani,

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\bar{R}_{\beta\alpha\gamma\sigma}$$

şeklindedir.

Teorem 11: (M,g) bir Riemann manifold ve $(TM,\tilde{g})$ de M nin tanjant demeti olsun. $(TM,\tilde{g})$ de tanımlı $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $(0,4)$ tipli $\bar{R}$ eğrilik tensörü son iki indise göre antisimetriktir. Yani,

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\bar{R}_{\alpha\beta\sigma\gamma}$$

şeklindedir.

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyonun Ricci Tensörü

$$\bar{R}_{\varepsilon\beta\gamma}{}^{\varepsilon} = \bar{R}_{\beta\gamma}$$

olmak üzere Ricci tensörünün bileşenleri,

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{jk} &= \bar{R}_{\varepsilon jk}{}^{\varepsilon} \\
&= \bar{R}_{hjk}{}^{h} + \bar{R}_{\bar{h}\,jk}{}^{\bar{h}} \\
&= R_{hjk}{}^{h} + R_{hjk}{}^{h} + g_{hk}R_j^h - \delta_h^h R_{jk} \\
&= R_{jk} + R_{jk} + R_{jk} - n.R_{jk} \\
&= (3-n)R_{jk}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{array}{ll}
1)\ \bar{R}_{jk} = (3-n)R_{jk} & 3)\ \bar{R}_{j\bar{k}} = 0 \\
2)\ \bar{R}_{\bar{j}k} = 0 & 4)\ \bar{R}_{\bar{j}\bar{k}} = 0
\end{array} \qquad (34)$$

olarak bulunur.

Teorem 12: (M, g) bir Riemann manifold ve $(TM, \tilde{g})$ de M nin tanjant demeti olsun. $(TM, \tilde{g})$ de tanımlı $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun Ricci tensörü simetriktir.

Teorem 13: (M, g) bir Riemann manifold ve $(TM, \tilde{g})$ de M nin tanjant demeti olsun. $(TM, \tilde{g})$ tanjant demetin $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre Ricci flat olması ancak ve ancak (M, g) Riemann manifoldunun Ricci flat olması ile mümkündür.

Şimdi de $(TM, \tilde{g})$ tanjant demetin $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre lokal Ricci simetrik olup olmadığına bakalım.

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\mathrm{i}}\bar{R}_{jk} &= E_i\bar{R}_{jk} - \bar{\Gamma}_{\mathrm{ij}}^{\varepsilon}\bar{R}_{\varepsilon k} - \bar{\Gamma}_{\mathrm{ik}}^{\varepsilon}\bar{R}_{j\varepsilon} \\
&= E_i\bar{R}_{jk} - \bar{\Gamma}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{h}}\bar{R}_{hk} - \bar{\Gamma}_{\mathrm{ij}}^{\bar{\mathrm{h}}}\underbrace{\bar{R}_{\bar{h}\,k}}_{0} - \bar{\Gamma}_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{h}}\bar{R}_{jh} - \bar{\Gamma}_{\mathrm{ik}}^{\bar{\mathrm{h}}}\underbrace{\bar{R}_{j\bar{h}}}_{0} \\
&= \left(\partial_i - y^s\Gamma_{\mathrm{si}}^{\mathrm{p}}\partial_{\bar{p}}\right)\left[(3-n)R_{jk}\right] - \Gamma_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{h}}[(3-n)R_{hk}] - \Gamma_{\mathrm{ik}}^{\mathrm{h}}\left[(3-n)R_{jh}\right] \\
&= (3-n)\left[\partial_i R_{jk} - \Gamma_{ij}^{h}R_{hk} - \Gamma_{ik}^{h}R_{jh}\right] \\
&= (3-n)\nabla_i R_{jk}
\end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jk} = (3-n)\nabla_i R_{jk}$$

ve benzer olarak

$$\begin{array}{ll} 1)\ \overline{\nabla}_{\mathrm{i}}\bar{R}_{jk} = (3-n)\nabla_{\mathrm{i}}R_{jk} & 5)\ \overline{\nabla}_{\bar{\mathrm{i}}}\bar{R}_{jk} = 0 \\ 2)\ \overline{\nabla}_{\mathrm{i}}\bar{R}_{j\bar{k}} = 0 & 6)\ \overline{\nabla}_{\bar{\mathrm{i}}}\bar{R}_{j\bar{k}} = 0 \\ 3)\ \overline{\nabla}_{\mathrm{i}}\bar{R}_{\bar{j}k} = 0 & 7)\ \overline{\nabla}_{\bar{\mathrm{i}}}\bar{R}_{\bar{j}k} = 0 \\ 4)\ \overline{\nabla}_{\mathrm{i}}\bar{R}_{\bar{j}\bar{k}} = 0 & 8)\ \overline{\nabla}_{\bar{\mathrm{i}}}\bar{R}_{\bar{j}\bar{k}} = 0 \end{array} \tag{35}$$

elde edilir.

Teorem 14: (M, g) bir Riemann manifold ve $(TM, \tilde{g})$ de M nin tanjant demeti olsun. $(TM, \tilde{g})$ tanjant demeti $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun lokal Ricci simetrik olması için gerek ve yeter şart (M, g) baz manifoldunun lokal Ricci simetrik olmasıdır.

Şimdi de $(TM, \tilde{g})$ tanjant demetin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre Ricci semi-simetrik olma durumunu inceleyelim.

Tanım 65: Bir (M, g) (pseudo-) Riemann manifoldu üzerinde

$$R(X, Y)R = 0$$

şartını sağlayan bir $R(X, Y)$ operatörü var ise (M, g) manifoldu semi-simetrik olarak adlandırılır. Burada $R(X, Y)$, R üzerinde türev işlevi gören eğrilik operatörüdür. Öklid uzaylarının semi-simetrik hiperyüzeyleri Nomizu tarafından sınıflandırılmış ve semi-simetrik Riemann manifoldlarının genel bir incelemesi Szabo tarafından yapılmıştır. Ayrıca K, (M, g) manifoldunun Ricci eğrilik tensörü olmak üzere

$$R(X, Y)K = 0$$

ise (M, g) manifoldunun Ricci semi-simetrik olduğu söylenir (Nomizu 1986; Szabo 1982).

Benzer şekilde TM tanjant demette her $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ vektör alanları için $\overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ eğrilik operatörü diferensiyel bir operatördür. Şimdi eğrilik operatörü $\overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ yi Ricci eğrilik tensörü $\overline{\mathrm{K}}$ ya uygulayalım. Yani her $\tilde{Z}$ ve $\widetilde{W}$ vektör alanı için

$$(\overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\overline{K})(\tilde{Z}, \widetilde{W}) = 0$$

durumunu göz önüne alalım. Adapte olmuş çatıda $(\overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\overline{K})(\tilde{Z}, \widetilde{W})$ tensörü lokal olarak

$$(\overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\overline{K})(\tilde{Z}, \widetilde{W})_{\alpha\beta\gamma\theta} = \overline{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\varepsilon}\overline{K}_{\varepsilon\theta} + \overline{R}_{\alpha\beta\theta}{}^{\varepsilon}\overline{K}_{\gamma\varepsilon} \tag{36}$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde lokal koordinatlarda,

$$(\overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\overline{K})(\tilde{Z}, \widetilde{W})_{ijkl} = \overline{R}_{ijk}{}^{p}\overline{K}_{pl} + \overline{R}_{ijl}{}^{p}\overline{K}_{kp}$$

olarak yazılır.

Teorem 15: (M, g) bir Riemann manifold ve $(TM, \tilde{g})$ de M nin tanjant demeti olsun. Bu durumda $(TM, \tilde{g})$ nin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre Ricci semi-simetrik olması ancak ve ancak $n \neq 3$ için (M, g) nin Ricci semi-simetrik olması ile mümkündür.

İspat: (36) eşitliğinde $\alpha = i, \beta = j, \gamma = k, \theta = l$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}(\overline{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\overline{K})(\tilde{Z}, \widetilde{W})_{ijkl} &= \overline{R}_{ijk}{}^{h}\overline{K}_{hl} + \overline{R}_{ijl}{}^{h}\overline{K}_{kh} \\ &= R_{ijk}{}^{h}[(3-n)R_{hl}] + R_{ijl}{}^{h}[(3-n)R_{kh}] \\ &= (3-n)[R_{ijk}{}^{h}R_{hl} + R_{ijl}{}^{h}R_{kh}] \\ &= (3-n)[(R(X, Y)Ric)(Z, W)]_{ijkl}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer bileşenler sıfırdır. Buradan $(TM, \tilde{g})$ nin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre Ricci semi-simetrik olmasının ancak ve ancak $n \neq 3$ için (M, g) nin Ricci semi-simetrik olması ile mümkün olduğu görülür.

$\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $\overline{\mathrm{K}}$ Ricci tensörü ile ilgili bir uygulama olarak (0,2) tipli genelleştirilmiş $\overline{\mathrm{Z}}$ tensörü TM tanjant demet üzerinde

$$\overline{Z}_{\alpha\beta} = \overline{K}_{\alpha\beta} + \phi\tilde{g}_{\alpha\beta}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overline{K}_{\alpha\beta}$, $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun Ricci tensörünün ve $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ ise tam lift metriğinin bileşenlerini göstermektedir. (23) ve (34) eşitliklerinden $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ ve $\overline{K}_{\alpha\beta}$ değerleri yukarıdaki eşitlikte yerlerine yazıldığında, sıfırdan farklı bileşenler

$$\overline{Z}_{ij} = (3-n)R_{ij},$$

$$\overline{Z}_{i\bar{j}} = \overline{Z}_{\bar{i}j} = \phi g_{ij}$$

olarak bulunur. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 16: (M, g) bir pseudo-Riemannian manifoldu ve $(TM, \tilde{g})$ onun tanjant demeti olsun. $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $\bar{Z}$ tensörü simetriktir.

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyonun Skaler Eğriliği

$\bar{\tau}$, $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonunun skaler eğriliğini göstersin. Bu taktirde,

$$\bar{\tau} = \bar{R}_{\beta\gamma}\tilde{g}^{\beta\gamma}$$

olmak üzere skaler eğrilik,

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \bar{R}_{j\gamma}\tilde{g}^{j\gamma} + \bar{R}_{\bar{j}\gamma}\tilde{g}^{\bar{j}\gamma} \\ &= \bar{R}_{jk}\underbrace{\tilde{g}^{jk}}_{0} + \underbrace{\bar{R}_{j\bar{k}}}_{0}\tilde{g}^{j\bar{k}} + \underbrace{\bar{R}_{\bar{j}k}}_{0}\tilde{g}^{\bar{j}k} + \bar{R}_{\bar{j}\bar{k}}\underbrace{\tilde{g}^{\bar{j}\bar{k}}}_{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Teorem 17: (M, g) bir Riemann manifoldu ve $(TM, \tilde{g})$ de M nin tanjant demeti olsun. $(TM, \tilde{g})$ de tanımlı $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun skaler eğriliği sıfırdır.

$\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $\bar{T}$ burulma tensörü ile igili bir uygulama olarak aşağıdaki teoremi ve ardından ispatını verelim.

Teorem 18: $(TM, \tilde{g})$ de $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $\bar{T}$ burulma tensörü

$$\underset{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}{\sigma}\bar{T}\big(\bar{T}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z}\big) = 0$$

eşitliğini sağlar. Burada σ, $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ vektör alanları için döngüsel toplamdır.

İspat: $(TM, \tilde{g})$ de tüm $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ vektör alanları için

$$\underset{\bar{X},\bar{Y},\bar{Z}}{\sigma}\bar{T}\big(\bar{T}(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z}\big) = \bar{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \epsilon}\bar{T}_{\epsilon\gamma}^{\ \ \sigma} + \bar{T}_{\gamma\alpha}^{\ \ \epsilon}\bar{T}_{\epsilon\beta}^{\ \ \sigma} + \bar{T}_{\beta\gamma}^{\ \ \epsilon}\bar{T}_{\epsilon\alpha}^{\ \ \sigma}$$

şeklinde olup (28) eşitliğindeki $\bar{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \sigma}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\bar{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \epsilon}\bar{T}_{\epsilon\gamma}^{\ \ \sigma} + \bar{T}_{\gamma\alpha}^{\ \ \epsilon}\bar{T}_{\epsilon\beta}^{\ \ \sigma} + \bar{T}_{\beta\gamma}^{\ \ \epsilon}\bar{T}_{\epsilon\alpha}^{\ \ \sigma} = 0$$

olur.

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyonun Ortalama Konneksiyonu

$(TM, \tilde{g})$ de $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $\widehat{\nabla}$ ortalama konneksiyonu, konneksiyon katsayıları yardımıyla

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} - \frac{1}{2}\overline{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$, $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun katsayılarını ve $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ ise $\hat{\nabla}$ ortalama konneksiyonun katsayılarını göstermektedir. (29) eşitliği kullanılarak $\hat{\nabla}$ ortalama konneksiyonunun $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ katsayıları

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_{ij}^{\ \ \bar{k}} &= \overline{\Gamma}_{ij}^{\ \ \bar{k}} - \frac{1}{2}\overline{T}_{ij}^{\ \ \bar{k}} \\ &= y^s R_{sij}^{\ \ \ k} + y_j R_i^{\ k} - y^k R_{ij} - \frac{1}{2}(y_j R_i^{\ k} - y_i R_j^{\ k}) \\ &= y^s R_{sij}^{\ \ \ k} - y^k R_{ij} + \frac{1}{2}(y_j R_i^{\ k} + y_i R_j^{\ k})\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

1) $\hat{\Gamma}_{ij}^{\ \ k} = \Gamma_{ij}^{\ \ k}$

2) $\hat{\Gamma}_{i\bar{j}}^{\ \ k} = 0$

3) $\hat{\Gamma}_{\bar{i}j}^{\ \ k} = 0$

4) $\hat{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\ \ k} = 0$

5) $\hat{\Gamma}_{ij}^{\ \ \bar{k}} = y^s R_{sij}^{\ \ \ k} - y^k R_{ij} + \frac{1}{2}(y_j R_i^{\ k} + y_i R_j^{\ k})$

6) $\hat{\Gamma}_{i\bar{j}}^{\ \ \bar{k}} = \Gamma_{ij}^{\ \ k}$

7) $\hat{\Gamma}_{\bar{i}j}^{\ \ \bar{k}} = 0$

8) $\hat{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\ \ \bar{k}} = 0$

olarak elde edilir.

Teorem 19: $(TM, \tilde{g})$ de $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $\hat{\nabla}$ ortalama konneksiyonu adapte olmuş çatıda

$$\begin{cases}\hat{\nabla}_{E_i}E_j = \Gamma_{ij}^k E_k + \{y^s R_{sij}^{\ \ \ k} - y^k R_{ij} + \frac{1}{2}(y_j R_i^{\ k} + y_i R_j^{\ k})\}E_{\bar{k}}, \\ \hat{\nabla}_{E_i}E_{\bar{j}} = \Gamma_{ij}^k E_{\bar{k}}, \\ \hat{\nabla}_{E_{\bar{i}}}E_j = 0, \\ \hat{\nabla}_{E_{\bar{i}}}E_{\bar{j}} = 0\end{cases}$$

şeklindedir. Burada Γ_{ij}^h ve $R_{hji}^{\ \ \ s}$ sırasıyla M üzerindeki ∇ Levi-Civita konneksiyonunun bileşenlerini ve g pseudo-Riemann metriğinin R Riemann eğrilik tensörünü gösterir.

Teorem 19 da verilen ortalama konneksiyonun katsayıları yardımıyla bu konneksiyonun eğrilik tensörü aşağıdaki gibi ifade edilir.

Önerme 1: $(TM, \tilde{g})$ de $\hat{\nabla}$ ortalama konneksiyonun $\hat{R}$ eğrilik tensörü adapte olmuş çatıda

1) $\hat{R}(E_i, E_j)E_k = R_{ijk}{}^l E_l + \{y^s \nabla_s R_{ijk}{}^l\} E_{\bar{l}}$

2) $\hat{R}(E_i, E_j)E_{\bar{k}} = R_{ijk}{}^l E_{\bar{l}}$

3) $\hat{R}(E_i, E_{\bar{j}})E_k = \{R_{ijk}{}^l + \delta_j^l R_{ik} - \frac{1}{2}(g_{jk} R_i{}^l + g_{ji} R_k{}^l)\} E_{\bar{l}}$

4) $\hat{R}(E_{\bar{i}}, E_j)E_k = \{R_{ijk}{}^l - \delta_i^l R_{jk} + \frac{1}{2}(g_{ik} R_j{}^l + g_{ij} R_k{}^l)\} E_{\bar{l}}$

5) $\hat{R}(E_{\bar{i}}, E_{\bar{j}})E_k = 0$

6) $\hat{R}(E_{\bar{i}}, E_j)E_{\bar{k}} = 0$

7) $\hat{R}(E_i, E_{\bar{j}})E_{\bar{k}} = 0$

8) $\hat{R}(E_{\bar{i}}, E_{\bar{j}})E_{\bar{k}} = 0$

olarak elde edilir.

$\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre $\hat{\nabla}$ ortalama konneksiyonun $\hat{R}$ Ricci tensörü

$$\hat{R}_{\varepsilon\beta\gamma}{}^{\varepsilon} = \hat{R}_{\beta\gamma}$$

şeklinde tanımlanır. $\hat{R}_{\beta\gamma}$ Ricci tensörünün bileşenleri,

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{jk} &= \hat{R}_{\varepsilon jk}{}^{\varepsilon} \\
&= \hat{R}_{hjk}{}^{h} + \hat{R}_{\bar{h}jk}{}^{\bar{h}} \\
&= R_{hjk}{}^{h} + R_{hjk}{}^{h} - \delta_h^h R_{jk} + \frac{1}{2} g_{hk} R_j^h + \frac{1}{2} g_{hj} R_k^h \\
&= R_{jk} + R_{jk} - \delta_h^h R_{jk} + \frac{1}{2} R_{jk} + \frac{1}{2} R_{kj} \\
&= (3-n) R_{jk}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&1)\ \hat{R}_{jk} = (3-n)R_{jk} \qquad && 3)\ \hat{R}_{j\bar{k}} = 0, \\
&2)\ \hat{R}_{\bar{j}k} = 0, && 4)\ \hat{R}_{\bar{j}\bar{k}} = 0.
\end{aligned} \tag{37}$$

olarak bulunur.

Teorem 20: (M, g) bir pseudo-Riemannian manifoldu ve TM, M nin $\tilde{g}$ tam lift metriği ile donatılmış tanjant demet olsun. (34) ve (37) eşitliklerinden görüleceği gibi $\hat{\nabla}$ ortalama konneksiyonun Ricci tensörü ile $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun Ricci tensörü çakışır.

Lemma 3: $\tilde{V}$, TM üzerinde bir fibre-preserving (fibre-koruyucu) vektör alanı olsun. $\tilde{g}$ tam lift metriğinin $\tilde{V}$ vektör alanı boyunca $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre Lie türevi aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$L_{\tilde{V}}\tilde{g} = \left\{(\nabla_i v^h)g_{hj} + \left(E_{\bar{j}}v^{\bar{h}}\right)g_{hi}\right\}dx^i\delta y^j$$

$$+\begin{Bmatrix}\left[E_i v^{\bar{h}} + \left(y^s R_{sia}{}^h + y_a R_i^h - y^h R_{ia}\right)v^a + \Gamma_{ia}^h v^{\bar{a}}\right]g_{hj} \\ +\left[E_j v^{\bar{h}} + \left(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\right)v^a + \Gamma_{ja}^h v^{\bar{a}}\right]g_{hi}\end{Bmatrix}dx^i dx^j \qquad (38)$$

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyonuna Göre Bazı Özel Vektör Alanları

Bu bölümde, ilk olarak lifte edilmiş (yükseltilmiş) vektör alanlarının incompressible (sıkıştırılamaz) ve harmonik olma durumları incelenecektir. Daha sonra, TM üzerindeki $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre concurrent, konformal, projektif ve $\tilde{\varphi}$(Ric) vektör alanları karakterize elde edilecektir.

Incompressible vektör alanı

Tanım 66: $(TM, \tilde{g})$, (M, g) Riemann manifoldunun $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış tanjant demeti olsun. TM üzerindeki bir $\tilde{V}$ vektör alanı için

$$tr\left(\overline{\nabla}\tilde{V}\right) = \overline{\nabla}_\alpha \tilde{V}^\alpha = 0$$

ise $\tilde{V}$ vektör alanı bir incompressible vektör alanıdır. Burada $\tilde{V} = v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$ şeklindedir.

Teorem 21: (M, g) bir Riemann manifoldu ve $(TM, \tilde{g})$ de M nin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona sahip tanjant demeti olsun. M üzerindeki bir V vektör alanı için,

i) $(TM, \tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^V V$ dikey lifti, $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir incompressible vektör alanıdır.

ii) $(TM, \tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^H V$ yatay lifti ve ${}^C V$ tam liftinin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir incompressible vektör alanı olması ancak ve ancak M de V vektör alanının Levi-Civita konneksiyonuna göre bir incompressible vektör alanı olması ile mümkündür (Gezer and Karakaş 2024).

İspat: (18) ve (30) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} tr(\overline{\nabla}\,{}^V V) &= \overline{\nabla}_\alpha {}^V V^\alpha \\ &= \overline{\nabla}_{\bar{h}} v^{\bar{h}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
tr(\overline{\nabla}\,{}^{H}V) &= \overline{\nabla}_{\alpha}{}^{H}V^{\alpha} \\
&= \overline{\nabla}_{h}v^{h} \\
&= (\partial_{h} - y^{s}\Gamma_{sh}^{m}\partial_{\overline{m}})v^{h} + \overline{\Gamma}_{hm}^{h}v^{m} \\
&= \nabla_{h}v^{h} \\
&= tr(\nabla V)
\end{aligned}
$$

ile

$$
\begin{aligned}
tr(\overline{\nabla}\,{}^{C}V) &= \overline{\nabla}_{\alpha}{}^{C}V^{\alpha} \\
&= \overline{\nabla}_{h}v^{h} + \overline{\nabla}_{\overline{h}}v^{\overline{h}} \\
&= (\partial_{h} - y^{s}\Gamma_{sh}^{m}\partial_{\overline{m}})v^{h} + \overline{\Gamma}_{hm}^{h}v^{m} + \partial_{\overline{h}}(y^{s}\nabla_{s}v^{h}) \\
&= 2\nabla_{h}v^{h} \\
&= 2tr(\nabla V)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan i) ve ii) sonuçlarını görmek kolaydır.

Harmonik vektör alanı

Tanım 67: $(TM,\tilde{g})$, (M,g) Riemann manifoldunun $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış tanjant demeti olsun. TM üzerindeki bir $\tilde{V}$ vektör alanı için

$$
\left(\overline{\nabla}_{i}\tilde{V}^{\epsilon}\right)\tilde{g}_{\epsilon j} - \left(\overline{\nabla}_{j}\tilde{V}^{\epsilon}\right)\tilde{g}_{\epsilon i} = 0
$$

şartı sağlanırsa $\tilde{V}$ vektör alanına harmonik vektör alanı denir. Burada $\tilde{V} = v^{h}E_{h} + v^{\overline{h}}E_{\overline{h}}$ formundadır (Yano and Ishihara 1973).

Aşağıdaki lemma doğrudan basit hesaplamalardan elde edilmiştir.

Lemma 4: $(TM,\tilde{g})$, (M,g) Riemann manifoldunun $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış tanjant demeti olsun. Bu durumda

i) ${}^{V}V$ için,

$$
\left(\overline{\nabla}_{\alpha}{}^{V}V^{\epsilon}\right)\tilde{g}_{\epsilon\beta} - \left(\overline{\nabla}_{\beta}{}^{V}V^{\epsilon}\right)\tilde{g}_{\epsilon\alpha} = \begin{pmatrix} \nabla_{i}v_{j} - \nabla_{j}v_{i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

elde edilir.

ii) ${}^{H}V$ için,

$$
\left(\overline{\nabla}_{\alpha}{}^{H}V^{\epsilon}\right)\tilde{g}_{\epsilon\beta} - \left(\overline{\nabla}_{\beta}{}^{H}V^{\epsilon}\right)\tilde{g}_{\epsilon\alpha} = \begin{pmatrix} y^{s}\left[R_{siaj} - R_{sjai} + g_{si}R_{ja} - g_{sj}R_{ia}\right]v^{a} & \nabla_{i}v_{j} \\ -\nabla_{j}v_{i} & 0 \end{pmatrix}
$$

elde edilir.

iii) ${}^{C}V$ için,

$$\left(\overline{\nabla}_{\alpha}{}^{C}V^{\epsilon}\right)\tilde{g}_{\epsilon\beta}-\left(\overline{\nabla}_{\beta}{}^{C}V^{\epsilon}\right)\tilde{g}_{\epsilon\alpha}$$

$$=\begin{pmatrix} y^{s}\left[\nabla_{s}\left(\nabla_{i}v_{j}-\nabla_{j}v_{i}\right)+\left(R_{siaj}-R_{sjai}+g_{si}R_{ja}-g_{sj}R_{ia}\right)v^{a}\right] & \nabla_{i}v_{j}-\nabla_{j}v_{i} \\ \nabla_{i}v_{j}-\nabla_{j}v_{i} & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Dolayısıyla, Lemma 4'ün bir sonucu olarak aşağıdaki sonuçlar yazılır.

Önerme 2: (M,g) bir Riemann manifoldu ve $(TM,\tilde{g})$ de M nin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona sahip tanjant demeti olsun. M üzerindeki bir V vektör alanı için,

i) $(TM,\tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^{V}V$ dikey liftinin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir harmonik vektör alanı olması ancak ve ancak V vektör alanının M de Levi-Civita konneksiyonuna göre bir harmonik vektör alanı olması ile mümkündür.

ii) $(TM,\tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^{C}V$ tam liftinin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir harmonik vektör alanı olması ancak ve ancak V vektör alanının M de Levi-Civita konneksiyonuna göre bir harmonik vektör alanı olması ve $R_{siaj}-R_{sjai}+g_{si}R_{ja}-g_{sj}R_{ia}=0$ şartının sağlanması ile mümkündür.

iii) $(TM,\tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^{H}V$ yatay liftinin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir harmonik vektör alanı olması ancak ve ancak V vektör alanının M de Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olması ve $R_{siaj}-R_{sjai}+g_{si}R_{ja}-g_{sj}R_{ia}=0$ şartının sağlanması ile mümkündür.

Concurrent vektör alanı

Tanım 68: $(TM,\tilde{g})$ de bir $\tilde{V}$ vektör alanı $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre

$$\overline{\nabla}_{\beta}\tilde{V}^{\epsilon}=\overline{\nabla}_{E_{\beta}}\tilde{V}^{\epsilon}=\tilde{k}\delta_{\beta}^{\epsilon}, \tag{39}$$

şartını sağlarsa $\tilde{V}$ vektör alanına concurrent vektör alanı denir. Burada $\tilde{k}$, TM de bir fonksiyon, $\delta_{\beta}^{\epsilon}$ Kronecker delta sembolü ve $\tilde{V}=v^{h}E_{h}+v^{\overline{h}}E_{\overline{h}}$ şeklindedir.

Teorem 22: (M,g) bir Riemann manifoldu ve $(TM,\tilde{g})$ de M nin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona sahip tanjant demeti olsun. TM üzerindeki bir $\tilde{V}$ vektör alanı,

$$\tilde{V}=\begin{pmatrix} v^{h} \\ \frac{1}{n}[tr(\nabla V)]y^{h} \end{pmatrix}$$

formunu alır ve

$$\frac{1}{n}\left[\nabla_j\big(tr(\nabla V)\big)y^h\right] + \left(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\right)v^h = 0$$

şartını sağlarsa $\tilde{V}$ vektör alanı bir fibre-preserving concurrent vektör alanıdır.

İspat: İlk olarak (39) eşitliğinde $\epsilon = h, \beta = \bar{j}$ olarak alınırsa

$$\overline{\nabla}_{\bar{j}} v^h = E_{\bar{j}} v^h + \overline{\Gamma}_{\bar{j}a}^h v^a + \overline{\Gamma}_{\bar{j}\bar{a}}^h v^{\bar{a}} = \tilde{k}\delta_{\bar{j}}^h$$
$$\Rightarrow \partial_{\bar{j}} v^h = 0$$
$$\Rightarrow v^h = v^h(x^h)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\epsilon = h, \beta = j$ ve $\epsilon = \bar{h}, \beta = \bar{j}$ olarak düşünüldüğünde sırasıyla

$$\overline{\nabla}_j v^h = E_j v^h + \overline{\Gamma}_{ja}^h v^a + \overline{\Gamma}_{j\bar{a}}^h v^{\bar{a}} = \tilde{k}\delta_j^h$$
$$\Rightarrow \partial_j v^h + \Gamma_{ja}^h v^a = \tilde{k}\delta_j^h$$
$$\Rightarrow \nabla_j v^h = \tilde{k}\delta_j^h \qquad (h \to j)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{n}\nabla_j v^j = \tilde{k}$$

ve

$$\overline{\nabla}_{\bar{j}} v^{\bar{h}} = E_{\bar{j}} v^{\bar{h}} + \overline{\Gamma}_{\bar{j}a}{}^{\bar{h}} v^a + \overline{\Gamma}_{\bar{j}\bar{a}}{}^{\bar{h}} v^{\bar{a}} = \tilde{k}\delta_{\bar{j}}^{\bar{h}}$$
$$\Rightarrow \partial_{\bar{j}} v^{\bar{h}} = \frac{1}{n}\nabla_j v^j \delta_{\bar{j}}^{\bar{h}}$$
$$\Rightarrow \partial_{\bar{j}} v^{\bar{h}} = \frac{1}{n}\left[tr(\nabla V)\delta_{\bar{j}}^{\bar{h}}\right]$$
$$\Rightarrow \partial_{\bar{j}} v^{\bar{h}} = \frac{1}{n}\left[tr(\nabla V)\left(\partial_{\bar{j}} y^h\right)\right]$$
$$\Rightarrow \partial_{\bar{j}} v^{\bar{h}} = \partial_{\bar{j}}\left[\frac{1}{n}tr(\nabla V)y^h\right]$$
$$\Rightarrow v^{\bar{h}} = \frac{1}{n}[tr(\nabla V)]y^h$$

bulunur.

Son olarak, $\epsilon = \bar{h}, \beta = j$ olarak alındığında gerekli olan şart elde edilir:

$$\overline{\nabla}_j v^{\bar{h}} = E_j v^{\bar{h}} + \overline{\Gamma}_{ja}{}^{\bar{h}} v^a + \overline{\Gamma}_{j\bar{a}}{}^{\bar{h}} v^{\bar{a}} = \tilde{k}\delta_j^{\bar{h}}$$

$$\Rightarrow E_j\left[\frac{1}{n}[tr(\nabla V)]y^h\right] + \left(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\right)v^a + \Gamma_{ja}^h\left[\frac{1}{n}[tr(\nabla V)]y^a\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\partial_j - y^s\Gamma_{sj}^m\partial_{\bar{m}}\right)\left[\frac{1}{n}[tr(\nabla V)]y^h\right] + \left(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\right)v^a + y^a\Gamma_{ja}^h\left[\frac{1}{n}[tr(\nabla V)]\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left[\partial_j\big(tr(\nabla V)\big)y^h\right] - y^s\Gamma_{sj}^h\left[\frac{1}{n}[tr(\nabla V)]\right] + \left(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\right)v^a + y^a\Gamma_{ja}^h\left[\frac{1}{n}[tr(\nabla V)]\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left[\partial_j\big(tr(\nabla V)\big)y^h\right] + \left(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\right)v^a = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left[\nabla_j\big(tr(\nabla V)\big)y^h\right] + \left(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\right)v^a = 0.$$

Konformal vektör alanı

Bu bölümde, $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre TM tanjant demet üzerindeki fibre-preserving konformal vektör alanları incelenecektir.

Tanım 69: TM üzerindeki bir $\tilde{V} = \left(v^h, v^{\bar{h}}\right)$ vektör alanı

$$L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{\alpha\beta} = \left(\overline{\nabla}_\alpha \tilde{V}^\epsilon\right)\tilde{g}_{\epsilon\beta} + \left(\overline{\nabla}_\beta \tilde{V}^\epsilon\right)\tilde{g}_{\epsilon\alpha} = 2\widetilde{\Omega}\tilde{g}_{\alpha\beta} \tag{40}$$

şartını sağlarsa $\tilde{V} = \left(v^h, v^{\bar{h}}\right)$ vektör alanına fibre-preserving konformal vektör alanı denir. Burada $L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{\alpha\beta}$, $\tilde{V}$ ye göre $\tilde{g}$ metriğinin Lie türevi, $\widetilde{\Omega}$ ise TM üzerinde skaler bir fonksiyondur.

(40) eşitliğinde sırasıyla $(\alpha, \beta) = (i, \bar{j}), (\bar{\imath}, j)\ ve\ (i, j)$ durumları dikkate alınıp (23) ve (38) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{cases} \text{(i) } (\nabla_i v^h)g_{hj} + \left(E_{\bar{j}} v^{\bar{h}}\right)g_{hj} = 2\widetilde{\Omega}g_{ij}, \\ \text{(ii) } \left(E_{\bar{\imath}} v^{\bar{h}}\right)g_{hj} + \left(\nabla_j v^h\right)g_{hi} = 2\widetilde{\Omega}g_{ij}, \\ \text{(iii) } \left[E_i v^{\bar{h}} + \left(y^s R_{sia}{}^h + y_a R_i^h - y^h R_{ia}\right)v^a + \Gamma_{ia}^{\ h} v^{\bar{a}}\right]g_{hj} \\ \qquad + \left[E_j v^{\bar{h}} + \left(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\right)v^a + \Gamma_{ja}^{\ h} v^{\bar{a}}\right]g_{hi} = 0 \end{cases} \tag{41}$$

denklem sistemi elde edilir.

Önerme 3: TM üzerindeki $\widetilde{\Omega}$ skalar fonksiyonu indirgenmiş (x^h, y^h) koordinatlarına göre sadece (x^h) değişkenine bağlıdır.

İspat: Eğer (41) de verilen denklem sisteminde ii) eşitliğinin her iki tarafına $E_{\bar{k}}$ uygulanırsa

$$g_{hj}E_{\bar{k}}E_{\bar{\imath}}v^{\bar{h}} = 2E_{\bar{k}}\big(\widetilde{\Omega}\big)g_{ij},$$

ve

$$E_{\bar{k}}\big(\widetilde{\Omega}\big)g_{ij} = E_{\bar{\imath}}\big(\widetilde{\Omega}\big)g_{kj}$$

olmak üzere

$$(n-1)E_{\bar{k}}\big(\widetilde{\Omega}\big) = 0$$

elde edilir. Bu da $\widetilde{\Omega}$ skalar fonksiyonunun sadece (x^h) değişkenine bağlı olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\widetilde{\Omega}$ skalar fonksiyonuna (M, g) deki bir fonksiyon olarak bakılabilir. Bundan sonra $\widetilde{\Omega}$ fonksiyonu netlik sağlamak adına ρ olarak dikkate alınacaktır.

(41) denklem sisteminden ve Önerme 3'ten $E_{\bar{\imath}}(v^{\bar{h}})$ ifadesinin sadece (x^h) değerine bağlı olduğu görülür. Buradan hareketle,

$$v^{\bar{h}} = y^a A_a^h + B^h \tag{42}$$

elde edilir. Burada A_a^h ve B^h fonksiyonları (x^h) değişkenine bağlı fonksiyonlardır.

Önerme 4: Eğer

$$B = B^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

olarak alınırsa B vektör alanı, (M, g) üzerinde ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre bir Killing vektör alanıdır.

İspat: (42) ifadesi, (41) de verilen denklem sistemindeki iii) eşitliğinde kullanılırsa

$$\nabla_i B_j + \nabla_j B_i = 0, \tag{43}$$

ve

$$v^a(R_{siaj} + R_{sjai} + g_{sa}R_{ij} - g_{sj}R_{ia} + g_{sa}R_{ji} - g_{si}R_{ja}) + \nabla_i A_{sj} + \nabla_j A_{si} = 0 \tag{44}$$

elde edilir. (43) eşitliğinden

$$L_B g_{ij} = \nabla_i B_j + \nabla_j B_i = 0$$

olur. Bu ise B vektör alanının (M, g) üzerinde Levi-Civita konneksiyonuna göre bir Killing vektör alanı olduğunu gösterir.

(42) ifadesi (41) denklem sistemindeki (ii) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&E_{\bar{\imath}}\left(v^{\bar{h}}\right) g_{hj} + \left(\nabla_j v^h\right) g_{hi} = 2\rho g_{ij} \\
&\Rightarrow \partial_{\bar{\imath}}(y^s A_s^h + B^h) g_{hj} + \left(\nabla_j v^h\right) g_{hi} = 2\rho g_{ij} \\
&\Rightarrow A_i^h g_{hj} + \left(\nabla_j v^h\right) g_{hi} = 2\rho g_{ij}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$g_{hj} A_i^h = 2\rho g_{ij} - g_{hi}\left(\nabla_j v^h\right) \tag{45}$$

elde edilir.

Önerme 5: M üzerinde bileşenleri (v^h) olarak gösterilen V vektör alanı,

$$2\delta_a^h R_{ij} - R_{ia}\delta_j^h - R_{ja}\delta_i^h = 0$$

olursa ∇ Riemann bağlantısına göre bir projektif vektör alanı belirtir.

İspat: (45) eşitliğinin her iki tarafının ∇_k kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} g_{hj}(\nabla_k A_i^h) &= \nabla_k\left[2\rho g_{ij} - g_{hi}\left(\nabla_j v^h\right)\right] \\ &= 2(\nabla_k\rho)g_{ij} - g_{hi}\nabla_k\nabla_j v^h \\ &= 2\rho_k g_{ij} - g_{hi}\left(L_V\Gamma_{kj}^h - R_{akj}{}^h v^a\right) \end{aligned}$$

$$\nabla_k A_{ij} = 2\rho_k g_{ij} - L_V\Gamma_{kj}^h g_{hi} - R_{akij}v^a \tag{46}$$

elde edilir. (46) eşitliği (44) de yerine yazıldığında

$$v^a(R_{siaj} + R_{sjai} + g_{sa}R_{ij} - g_{sj}R_{ia} + g_{sa}R_{ji} - g_{si}R_{ja}) + \nabla_i A_{sj} + \nabla_j A_{si} = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} v^a(R_{siaj} + R_{sjai} + g_{sa}R_{ij} - g_{sj}R_{ia} + g_{sa}R_{ji} - g_{si}R_{ja}) \\ +2\rho_i g_{sj} - L_V\Gamma_{ij}^h g_{hs} - R_{aisj}v^a + 2\rho_j g_{si} - L_V\Gamma_{ji}^h g_{hs} - R_{ajsi}v^a \end{matrix} = 0,$$

$$\Rightarrow 2(L_V\Gamma_{ij}^h)g_{hs} = v^a\left(g_{sa}R_{ij} - g_{sj}R_{ia} + g_{sa}R_{ji} - g_{si}R_{ja}\right) + 2\left(\rho_i g_{sj} + \rho_j g_{si}\right)$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı g^{sm} ile kontraksiyon yapılırsa

$$L_V\Gamma_{ij}^m = \rho_i\delta_j^m + \rho_j\delta_i^m + \frac{1}{2}v^a\left(2\delta_a^m R_{ij} - R_{ia}\delta_j^m - R_{ja}\delta_i^m\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $2\delta_a^m R_{ij} - R_{ia}\delta_j^m - R_{ja}\delta_i^m = 0$ ise V, ∇ Riemann bağlantısına göre M üzerinde bir projektif vektör alanıdır. Burada $\rho_i = \nabla_i\rho$ dir.

Şimdi bu durumun tersi dikkate alınsın. Yani M manifoldunun ∇ Riemann bağlantısına uygun olarak projektif bir $V = v^h\frac{\partial}{\partial x^h}$ vektör alanına sahip olduğunu varsayalım. Bu bağlamda aşağıdaki önerme ifade edilir:

Önerme 6: TM üzerinde

$$\tilde{V} = v^h E_h + (y^s A_s^h + B^h)E_{\overline{h}}$$

olarak tanımlanan $\tilde{V}$ vektör alanı $A_i^h = g^{ha}A_{ai}$, $A_{ij} = 2\rho g_{ij} + \nabla_i v_j - L_V g_{ij}$, $g_{ji}B^j = B_i$, $\nabla_i B_j = L_B g_{ij} - \nabla_j B_i$ olmak üzere $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir fibre-preserving konformal vektör alanı oluşturur.

İspat: Yukarıda belirtilen koşulları sağlayan B_h, v^h ve A_i^h verildiğinde, $\tilde{V} = v^h E_h + (y^s A_s^h + B^h)E_{\overline{h}}$ vektör alanının $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre TM üzerinde bir fibre-preserving konformal vektör alanı olarak nitelendirileceği açıktır.

Projektif vektör alanı

Yamauchi tarafından TM tanjant demette $\tilde{g}$ tam lift (*II*) metriğine göre fibre-preserving vektör alanlarının kapsamlı bir sınıflandırması sunulmuştur. Ayrıca Hasegawa ve Yamauchi, lift konneksiyonlarına göre projektif vektör alanlarının bir sınıflandırmasını yapmıştır (Yamauchi 1998; Hasegawa and Yamauchi 2003).

Bu bölümde TM de $\overline{\overline{\nabla}}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonuna göre fibre-preserving projektif vektör alanları incelenmiştir. Öncelikle daha sonra ihtiyaç duyulacak lemmayı aşağıda verelim.

Lemma 5: $\tilde{V} = v^h E_h + v^{\overline{h}} E_{\overline{h}}$ fibre-preserving vektör alanına göre adapte olmuş çatının Lie türevleri aşağıdaki gibi tanımlıdır (Yamauchi 1994):

$$L_{\tilde{V}} E_h = -(\partial_h v^a) E_a + \{y^b v^c R_{hcb}{}^a - v^{\bar{b}} \Gamma^a_{bh} - (E_h v^{\bar{a}}\} E_{\bar{a}},$$

$$L_{\tilde{V}} E_{\bar{h}} = \{v^b \Gamma^a_{bh} - (E_{\bar{h}} v^{\bar{a}})\} E_{\bar{a}}.$$

Tanım 70*:* $(TM, \tilde{g})$, (M, g) Riemann manifoldunun $\overline{\overline{\nabla}}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış tanjant demeti olsun. TM üzerindeki bir $\tilde{V} = v^h E_h + v^{\overline{h}} E_{\overline{h}}$ vektör alanının $\overline{\overline{\nabla}}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir fibre-preserving projektif vektör alanı olması ancak ve ancak

$$\begin{aligned}(L_{\tilde{X}} \overline{\overline{\nabla}})(\tilde{Y}, \tilde{Z}) &= L_{\tilde{X}}(\overline{\overline{\nabla}}_{\tilde{Y}} \tilde{Z}) - \overline{\overline{\nabla}}_{\tilde{Y}}(L_{\tilde{X}} \tilde{Z}) - \overline{\overline{\nabla}}_{(L_{\tilde{X}} \tilde{Y})} \tilde{Z} \\ &= \tilde{\theta}(\tilde{Y}) \tilde{Z} + \tilde{\theta}(\tilde{Z}) \tilde{Y}\end{aligned}$$

şeklinde $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_{\bar{\imath}})$ 1-formunun olması ile mümkündür. Burada $\tilde{Y}$ ve $\tilde{Z}$, TM üzerindeki birer vektör alanıdır.

Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonuna göre TM üzerindeki fibre-preserving projektif vektör alanlarının genel formu şu şekilde verilir:

Teorem 23: $(TM, \tilde{g})$, (M, g) Riemann manifoldunun tanjant demeti olmak üzere $\tilde{V} = v^h E_h + v^{\overline{h}} E_{\overline{h}}$ vektör alanı

$$\tilde{V} = {}^H V + {}^V B + \gamma A,$$

formunu alır

i) $\bar{\theta} = \theta_i dx^i$,

ii) $\nabla_i \theta_j = 0$,

iii) $\nabla_j A_i^h = \theta_j \delta_i^h - v^c R_{cji}{}^h$,

iv) $R_{aij}{}^{h}B^{a} = B^{h}R_{ij} - B_{j}R_{i}^{h}$,

v) $L_{V}\Gamma_{ij}^{h} = \theta_{i}\delta_{j}^{h} + \theta_{j}\delta_{i}^{h}$

şartları sağlanırsa $\tilde{V},\ TM$ de $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonuna göre bir fibre-preserving projektif vektör alanı belirtir.

İspat: TM de bir $\tilde{V} = v^{h}E_{h} + v^{\bar{h}}E_{\bar{h}}$ vektör alanının $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonuna göre bir fibre-preserving projektif vektör alanı olması ancak ve ancak

$$\begin{aligned}(L_{\tilde{X}}\bar{\nabla})(\tilde{Y},\tilde{Z}) &= L_{\tilde{X}}\left(\bar{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z}\right) - \bar{\nabla}_{\tilde{Y}}\left(L_{\tilde{X}}\tilde{Z}\right) - \bar{\nabla}_{(L_{\tilde{X}}\tilde{Y})}\tilde{Z} \\ &= \tilde{\theta}(\tilde{Y})\tilde{Z} + \tilde{\theta}(\tilde{Z})\tilde{Y}\end{aligned}$$

şeklinde $\tilde{\theta} = \left(\tilde{\theta}_{i},\tilde{\theta}_{\bar{\imath}}\right)$ 1-formunun olması ile mümkündür. Burada $\tilde{Y}$ ve $\tilde{Z}$ vektör alanlarıdır. Aşağıdaki sistemi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}\left(L_{\tilde{V}}\overline{\nabla}\right)(E_{\bar{\imath}},E_{\bar{\jmath}}) &= L_{\tilde{V}}(\overline{\nabla}_{E_{\bar{\imath}}}E_{\bar{\jmath}}) - \overline{\nabla}_{E_{\bar{\imath}}}(L_{\tilde{V}}E_{\bar{\jmath}}) - \overline{\nabla}_{(L_{\tilde{V}}E_{\bar{\imath}})}E_{\bar{\jmath}} \\ &= \tilde{\theta}(E_{\bar{\imath}})E_{\bar{\jmath}} + \tilde{\theta}(E_{\bar{\jmath}})E_{\bar{\imath}},\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\left(L_{\tilde{V}}\overline{\nabla}\right)(E_{\bar{\imath}},E_{j}) &= L_{\tilde{V}}(\overline{\nabla}_{E_{\bar{\imath}}}E_{j}) - \overline{\nabla}_{E_{\bar{\imath}}}(L_{\tilde{V}}E_{j}) - \overline{\nabla}_{(L_{\tilde{V}}E_{\bar{\imath}})}E_{j} \\ &= \tilde{\theta}(E_{\bar{\imath}})E_{j} + \tilde{\theta}(E_{j})E_{\bar{\imath}},\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\left(L_{\tilde{V}}\overline{\nabla}\right)(E_{i},E_{j}) &= L_{\tilde{V}}(\overline{\nabla}_{E_{i}}E_{j}) - \overline{\nabla}_{E_{i}}(L_{\tilde{V}}E_{j}) - \overline{\nabla}_{(L_{\tilde{V}}E_{i})}E_{j} \\ &= \tilde{\theta}(E_{i})E_{j} + \tilde{\theta}(E_{j})E_{i}.\end{aligned} \tag{49}$$

(30) ifadesi ve Lemma 5, (47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\left\{\partial_{\bar{\imath}}\left(\partial_{\bar{\jmath}}v^{\bar{a}}\right)\right\}E_{\bar{a}} = \tilde{\theta}_{\bar{\imath}}E_{\bar{\jmath}} + \tilde{\theta}_{\bar{\jmath}}E_{\bar{\imath}} \tag{50}$$

ve benzer olarak (48) eşitliğinden

$$\left\{-v^{c}R_{jci}{}^{a} + (E_{\bar{\imath}}v^{\bar{b}})\Gamma_{bj}^{a} + E_{\bar{\imath}}(E_{j}v^{\bar{a}})\right\}E_{\bar{a}} = \tilde{\theta}_{\bar{\imath}}E_{j} + \tilde{\theta}_{j}E_{\bar{\imath}} \tag{51}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\tilde{\theta}_{\bar{\imath}} = 0 \tag{52}$$

olur. $\tilde{\theta}_{\bar{\imath}} = 0$ olduğundan (50) denklemi

$$\partial_{\bar{\imath}}\left(\partial_{\bar{\jmath}}v^{\bar{a}}\right) = 0$$

şekline dönüşür ve buradan

$$v^{\bar{a}} = y^s A_s^a + B^a \tag{53}$$

elde edilir. Bu eşitlikte A_s^a ve B^a, sadece (x^h) a bağlı belirli fonksiyonlardır. Bu nedenle, TM de $\tilde{V}$ fibre-preserving projektif vektör alanı

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}} \\ &= v^h E_h + \{y^s A_s^a + B^a\} E_{\bar{h}} \\ &= {}^H V + {}^V B + \gamma A\end{aligned} \tag{54}$$

olarak ifade edilir.

(53) ifadesini (51) eşitliğinde yerine yazdığımızda,

$$R_{aji}{}^h v^a + \nabla_j A_i^h = \delta_i^h \theta_j \tag{55}$$

olur. (53) ve (55) ifadeleri, (49) eşitliğinde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}&\{\nabla_i \nabla_j v^h + R_{aij}{}^h v^a\} E_h + \{\nabla_i \nabla_j B^h + R_{aij}{}^h B^a + B_j R_i^h - B^h R_{ij} \\ &+ y^s [\nabla_i \nabla_j A_s^h + A_s^a R_{aij}{}^h - R_{sij}^{\ a} A_a^h + v^a \nabla_a R_{sij}{}^h - v^a \nabla_i R_{jas}{}^h \\ &+ \nabla_j v^a R_{sia}{}^h + \nabla_i v^a R_{sja}{}^h - \delta_s^h [v^a \nabla_a R_{ij} + \nabla_i v^a R_{aj} + \nabla_j v^a R_{ia}] \\ &+ v^a g_{sj} \nabla_a R_i^h + \nabla_j v^a g_{sa} R_i^h + \nabla_i v^a g_{sj} R_a^h + A_s^a g_{aj} R_i^h - g_{sj} R_i^a A_a^h]\} E_{\bar{h}} \\ &= \tilde{\theta}_i E_j + \tilde{\theta}_j E_i\end{aligned} \tag{56}$$

elde edilir. (56) eşitliğinden

$$\nabla_i \nabla_j v^h + R_{aij}{}^h v^a = \tilde{\theta}_i \delta_j^h + \tilde{\theta}_j \delta_i^h, \tag{57}$$

$$\nabla_i \nabla_j B^h + R_{aij}{}^h B^a + B_j R_i^h - B^h R_{ij} = 0, \tag{58}$$

ve

$$\begin{aligned}&\nabla_i \nabla_j A_s^h + A_s^a R_{aij}{}^h - R_{sij}{}^a A_a^h + v^a \nabla_a R_{sij}{}^h - v^a \nabla_i R_{jas}{}^h + \nabla_j v^a R_{sia}{}^h + \nabla_i v^a R_{sja}{}^h \\ &- \delta_s^h L_V R_{ij} + v^a g_{sj} \nabla_a R_i^h + \nabla_j v^a g_{sa} R_i^h + \nabla_i v^a g_{sj} R_a^h + A_s^a g_{aj} R_i^h - g_{sj} R_i^a A_a^h = 0\end{aligned} \tag{59}$$

eşitlikleri yazılır. (57) eşitliğinde $L_V \Gamma_{ki}^m = \nabla_k \nabla_i v^m + R_{aki}{}^m v^a$ formülü kullanılırsa

$$L_V \Gamma_{ij}^m = \tilde{\theta}_i \delta_j^h + \tilde{\theta}_j \delta_i^h$$

olur. Buradan indirgenmiş vektör alanı $V = v^h \frac{\partial}{\partial x^h}$ nin ∇ Riemann bağlantısına göre bir projektif vektör alanı belirttiği görülür. Eğrilik tensörünün Lie türevine ilişkin bağıntıyı kullanarak

$$L_V R_{ijk}{}^h = \nabla_i(L_v\Gamma_{jk}) - \nabla_j(L_v\Gamma_{ik})$$

olmak üzere

$$L_V R_{ij} = -(n-1)\nabla_i\theta_j \tag{60}$$

elde edilir. (59) eşitliğinde h ve s indisleri arasında kontraksiyon yapılıp (55) ve (60) eşitlikleri kullanılırsa $n \neq 2$ için

$$\nabla_i\theta_j = 0 \tag{61}$$

elde edilir. Bu $\theta_a\theta^a = c$ (sabit) olduğunu gösterir. (61) eşitliğini (58) de kullanarak

$$R_{aij}{}^h B^a = B^h R_{ij} - B_j R_i^h$$

bulunur.

Tersine, yukarıdaki adımlar saklı kalmak kaydıyla eğer B^h, v^h, θ_h ve A_i^h tensörleri (i)-(v) şartlarını sağlayacak şekilde alınırsa $\tilde{X} = {}^H V + {}^V B + \gamma A$ vektör alanının Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonuna göre bir fibre-preserving projektif vektör alanı belirttiği görülür. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Her $\tilde{V}$ fibre-preserving projektif vektör alanının M üzerinde bileşenleri (v^h) olan bir V vektör alanı oluşturduğu iyi bilinen bir gerçektir, burada $\tilde{V} = (v^h,\ v^{\bar{h}})$ TM üzerinde fibre-preserving vektör alanını temsil eder. Aşağıdaki sonuç doğrudan Teorem 23 ve ispatından ortaya çıkmaktadır.

Sonuç 3: TM, M pseudo-Riemann manifoldunun Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış bir tanjant demeti olsun. Her fibre-preserving projektif vektör alanı $\tilde{V}$, (54) biçimindedir ve doğal olarak M üzerinde bir projektif vektör alanı V oluşturur.

$\tilde{\varphi}(Ric)$ vektör alanı

Bir M Riemann manifoldu üzerinde lokal olarak $\varphi = \varphi^m \frac{\partial}{\partial x^m}$ şeklinde temsil edilen φ vektör alanı, aşağıdaki koşul altında bir φ(Ric) vektör alanı olarak tanımlanır:

$$\nabla(\overline{\varphi}) = \gamma Ric.$$

Burada γ sıfırdan farklı bir skaler fonksiyon; ∇, g nin Riemann konneksiyonu; Ric, (M, g) nin Ricci tensörü ve $g(\varphi, \xi) = \overline{\varphi}\xi$. Denklem lokal olarak şu şekilde ifade edilir:

$$\nabla_j\overline{\varphi}_i = \gamma R_{ij}.$$

Burada $\overline{\varphi}_i = g_{im}\varphi^m$ ve R_{ij}, Ricci tensörünü göstermektedir.

Tanım 71: TM üzerindeki bir $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}^h E_h + \tilde{\varphi}^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$ vektör alanı,

$$\overline{\nabla}_K \overline{\varphi}_M = \tilde{\gamma} \tilde{R}_{KM}, \tag{62}$$

şartını sağlaması durumunda, $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonuna göre bir $\tilde{\varphi}(Ric)$ vektör alanı olarak adlandırılır. Burada $\tilde{\gamma}$ sıfırdan farklı bir skaler fonksiyon ve $\tilde{R}_{KM}$, TM üzerindeki Ricci tensörüdür. Ayrıca $\overline{\varphi}_M = \tilde{g}_{MK} \tilde{\varphi}^K$ şeklindedir.

Önerme 7: TM, M pseudo-Riemann manifoldunun $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış bir tanjant demeti olsun. TM üzerinde Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre $\tilde{\varphi}$ vektör alanı ancak ve ancak

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^h(x^h) \\ \tilde{\varphi}^{\bar{h}}(x^h) \end{pmatrix}$$

formuna sahip ve

i) $\nabla_i \tilde{\varphi}^h = 0$,

ii) $\nabla_i \tilde{\varphi}_{\bar{j}} = \lambda R_{ij}$,

iii) $(R_{sia}{}^h + g_{sa} R_i^h - \delta_s^h R_{ia}) \tilde{\varphi}^a = 0$

şartlarının sağlanması durumunda bir fibre-preserving $\tilde{\varphi}(Ric)$ vektör alanı belirtir.

İspat: (34) te verilen Ricci tensörleri (62) eşitliğinde yazılıp $K = \bar{i}, M = \bar{j}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_{\bar{i}} \tilde{\varphi}_{\bar{j}} = \tilde{\gamma} \tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}} \\
&\quad \Rightarrow \overline{\nabla}_{\bar{i}} (\tilde{\varphi}^{\epsilon} \tilde{g}_{\epsilon \bar{j}}) = 0 \\
&\quad \Rightarrow \overline{\nabla}_{\bar{i}} (\tilde{\varphi}^{h} \tilde{g}_{h \bar{j}}) = 0 \\
&\quad \Rightarrow (\overline{\nabla}_{\bar{i}} \tilde{\varphi}^{h}) \tilde{g}_{h \bar{j}} = 0 \\
&\quad \Rightarrow (E_{\bar{i}} \tilde{\varphi}^h + \Gamma_{\bar{i}a}^h \tilde{\varphi}^a + \Gamma_{\bar{i}\bar{a}}^h \tilde{\varphi}^{\bar{a}}) g_{hj} = 0 \\
&\quad \Rightarrow (E_{\bar{i}} \tilde{\varphi}^h) g_{hj} = 0 \\
&\quad \Rightarrow \tilde{\varphi}^h = \tilde{\varphi}^h(x^h)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak (62) eşitliğinde sırasıyla $K = \bar{i}, M = j$ ve $K = i, M = \bar{j}$ yazarak

$$\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_{\bar{i}} \tilde{\varphi}_{j} = \tilde{\gamma} \tilde{R}_{\bar{i}j} \\
&\quad \Rightarrow \overline{\nabla}_{\bar{i}} (\tilde{\varphi}^{\epsilon} \tilde{g}_{\epsilon j}) = 0 \\
&\quad \Rightarrow \overline{\nabla}_{\bar{i}} (\tilde{\varphi}^{\bar{h}} \tilde{g}_{\bar{h} j}) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\overline{\nabla}_{\bar{i}}\tilde{\varphi}^{\bar{h}})\tilde{g}_{\bar{h}j} = 0$$
$$\Rightarrow (E_{\bar{i}}\tilde{\varphi}^{\bar{h}} + \Gamma_{\bar{i}a}^{\bar{h}}\tilde{\varphi}^{a} + \Gamma_{\bar{i}\bar{a}}^{\bar{h}}\tilde{\varphi}^{\bar{a}})g_{hj} = 0$$
$$\Rightarrow (E_{\bar{i}}\tilde{\varphi}^{\bar{h}})g_{hj} = 0$$
$$\Rightarrow \tilde{\varphi}^{\bar{h}} = \tilde{\varphi}^{\bar{h}}(x^h)$$

ve

$$\overline{\nabla}_i\tilde{\varphi}_{\bar{j}} = \tilde{\gamma}\tilde{R}_{i\bar{j}}$$
$$\Rightarrow \overline{\nabla}_i(\tilde{\varphi}^{\epsilon}\tilde{g}_{\epsilon\bar{j}}) = 0$$
$$\Rightarrow \overline{\nabla}_i(\tilde{\varphi}^{h}\tilde{g}_{h\bar{j}}) = 0$$
$$\Rightarrow (\overline{\nabla}_i\tilde{\varphi}^{h})\tilde{g}_{h\bar{j}} = 0$$
$$\Rightarrow (E_i\tilde{\varphi}^{h} + \Gamma_{ia}^{h}\tilde{\varphi}^{a} + \Gamma_{i\bar{a}}^{h}\tilde{\varphi}^{\bar{a}})g_{hj} = 0$$
$$\Rightarrow (\partial_i\tilde{\varphi}^{h} + \Gamma_{ia}^{h}\tilde{\varphi}^{a})g_{hj} = 0$$
$$\Rightarrow (\nabla_i\tilde{\varphi}^{h})g_{hj} = 0$$

bulunur. Son olarak $K = i, M = j$ alınırsa

$$\overline{\nabla}_i\tilde{\varphi}_j = \tilde{\gamma}\tilde{R}_{ij}$$
$$\Rightarrow \overline{\nabla}_i(\tilde{\varphi}^{\epsilon}\tilde{g}_{\epsilon j}) = \tilde{\gamma}\tilde{R}_{ij}$$
$$\Rightarrow \overline{\nabla}_i(\tilde{\varphi}^{\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{h}j}) = \tilde{\gamma}(3-n)R_{ij}$$
$$\Rightarrow (\overline{\nabla}_i\tilde{\varphi}^{\bar{h}})\tilde{g}_{\bar{h}j} = \tilde{\gamma}(3-n)R_{ij}$$
$$\Rightarrow (E_i\tilde{\varphi}^{\bar{h}} + \overline{\Gamma}_{ia}^{\ \ \bar{h}}\tilde{\varphi}^{a} + \overline{\Gamma}_{i\bar{a}}^{\ \ \bar{h}}\tilde{\varphi}^{\bar{a}})g_{hj} = \tilde{\gamma}(3-n)R_{ij}$$
$$\Rightarrow \left[\left(\partial_i - y^s\Gamma_{si}^{h}\partial_{\bar{h}}\right)\tilde{\varphi}^{\bar{h}} + \left(y^sR_{sia}{}^{h} + y_aR_i^h - y^hR_{ia}\right)\tilde{\varphi}^{a} + \Gamma_{ia}^{h}\tilde{\varphi}^{\bar{a}}\right]g_{hj} = \tilde{\gamma}(3-n)R_{ij}$$
$$\Rightarrow \left[\partial_i\tilde{\varphi}^{\bar{h}} + \Gamma_{ia}^{h}\tilde{\varphi}^{\bar{a}} + (y^sR_{sia}{}^{h} + y_aR_i^h - y^hR_{ia})\tilde{\varphi}^{a}\right]g_{hj} = \tilde{\gamma}(3-n)R_{ij}$$
$$\Rightarrow (\nabla_i\tilde{\varphi}^{\bar{h}})g_{hj} + \left[y^s(R_{sia}{}^{h} + g_{sa}R_i^h - \delta_s^hR_{ia})\tilde{\varphi}^{a}\right]g_{hj} = \tilde{\gamma}(3-n)R_{ij}$$
$$\Rightarrow \nabla_i\tilde{\varphi}_{\bar{j}} = \tilde{\gamma}(3-n)R_{ij} \quad \text{ve} \quad y^s(R_{sia}{}^{h} + g_{sa}R_i^h - \delta_s^hR_{ia})\tilde{\varphi}^{a} = 0$$
$$\Rightarrow \nabla_i\tilde{\varphi}_{\bar{j}} = \lambda R_{ij}$$

elde edilir.

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyonuna Göre Ricci Soliton Yapısı

Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki düzgün bir V vektör alanı

$$\frac{1}{2}L_V g + Ric = \lambda g$$

şartını sağlıyorsa (M, g) Riemann manifoldu Ricci soliton olarak adlandırılır ve (M, g, V, λ) şeklinde gösterilir. Burada $L_V g$, Riemann metriği g nin V ye göre Lie türevi; Ric, (M, g) nin Ricci tensörü ve λ bir sabittir. V vektör alanına Ricci solitonunun potansiyel vektör alanı denir.

Şimdi TM üzerinde bir $\tilde{V}$ vektör alanı için $\left(TM, \tilde{g}, \tilde{V}, \lambda\right)$ yapısının $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir Ricci soliton olması için gerekli koşullara bakalım. $\tilde{V}$, $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre $\left(v^h, v^{\bar{h}}\right)$ bileşenlerine sahip TM üzerinde bir fibre-preserving (fibre-koruyucu) vektör alanı olsun. (13) eşitliğinden $\left(TM, \tilde{g}, \tilde{V}, \lambda\right)$ yapısı M üzerindeki X vektör alanı için ancak ve ancak

$$\frac{1}{2}L_{\tilde{V}}\tilde{g}(X^v, X^h) + \overline{K}(X^v, X^h) = \lambda\tilde{g}(X^v, X^h), \tag{63}$$

$$\frac{1}{2}L_{\tilde{V}}\tilde{g}(X^h, X^v) + \overline{K}(X^h, X^v) = \lambda\tilde{g}(X^h, X^v), \tag{64}$$

$$\frac{1}{2}L_{\tilde{V}}\tilde{g}(X^h, X^h) + \overline{K}(X^h, X^h) = \lambda\tilde{g}(X^h, X^h) \tag{65}$$

denklemlerinin sağlanması durumunda TM üzerinde bir Ricci soliton belirtir. Burada $\overline{K}$, $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun Ricci tensörünü göstermektedir. $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre $(TM, \tilde{g})$ de bir $\tilde{V}$ vektör alanı,

$$\frac{1}{2}L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{\alpha\beta} + \overline{K}_{\alpha\beta} = \lambda\tilde{g}_{\alpha\beta} \tag{66}$$

olacak şekilde bir λ reel sabiti varsa $(TM, \tilde{g})$ de bir Ricci soliton tanımlar. (66) denkleminde sırasıyla $(\alpha, \beta) = (\bar{i}, j)$, $(i, \bar{j})$ ve (i, j) olduğu dikkate alınıp (34) ve (38) eşitikleri kullanılarak aşağıdaki sistem yazılır:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \left(E_{\bar{i}}v^{\bar{h}}\right)g_{hj} + (\nabla_j v^h)g_{hi} = 2\lambda g_{ij},\\
&\text{(ii)} \quad (\nabla_i v^h)g_{hj} + \left(E_{\bar{j}}v^{\bar{h}}\right)g_{hi} = 2\lambda g_{ij},\\
&\text{(iii)} \quad \left[E_i v^{\bar{h}} + \left(y^s R_{sia}{}^h + y_a R_i^h - y^h R_{ia}\right)v^a + \Gamma_{ia}^{\ h} v^{\bar{a}}\right]g_{hj}\\
&\qquad + \left[E_j v^{\bar{h}} + \left(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\right)v^a + \Gamma_{ja}^{\ h} v^{\bar{a}}\right]g_{hi} = 0\\
&\qquad + 2(3-n)R_{jk}.
\end{aligned} \tag{67}$$

Aşağıda verilen önermeler dizisi bölümün sonundaki ana teoremin ispatında kullanılacaktır.

Önerme 8: TM üzerindeki λ skaler fonksiyonu, (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre yalnızca (x^h) değişkenine bağlıdır.

İspat: (67) de verilen denklem sistemindeki (i) eşitliğinin her iki tarafına $E_{\overline{k}}$ uygulandığında,

$$\begin{aligned} &g_{hj}E_{\overline{k}}E_{\overline{i}}v^{\overline{h}} = 2E_{\overline{k}}(\lambda)g_{ij} \\ &\Rightarrow E_{\overline{k}}(\lambda)g_{ij} = E_{\overline{i}}(\lambda)g_{kj} \\ &\Rightarrow (n-1)E_{\overline{k}}(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ise TM üzerindeki λ skaler fonksiyonun $\left(x^h, y^h\right)$ indirgenmiş koordinatlara göre yalnızca $\left(x^h\right)$ değişkenine bağlı olduğunu gösterir. Böylece λ, M üzerinde tanımlı bir fonksiyon olarak kabul edilebilir.

Önerme 8 ve (67) deki (i) eşitliğinden $E_{\overline{i}}\left(v^{\overline{h}}\right)$ ifadesinin sadece (x^h) değişkenine bağlı olduğu görülür. Dolayısıyla buradan

$$v^{\overline{h}} = y^a A_a^h + B^h \tag{68}$$

olarak yazılır. Burada A_a^h ve B^h, M üzerinde sadece (x^h) değişkenine bağlı olan sırasıyla bir $(1,1)$ tipli tensör alanını ve bir kontravaryant vektör alanını göstermektedir.

Önerme 9: Eğer

$$B = B^h \frac{\partial}{\partial x^h},$$

olarak alınırsa M manifoldunda $L_B g_{ij} = 2(n-3)R_{ij}$ olur.

İspat: (68) ve (34) eşitliklerindeki değerler, (67) deki (iii) eşitliğinde yazılırsa

$$\nabla_i B_j + \nabla_j B_i + 2(3-n)R_{ij} = 0 \tag{69}$$

ve

$$v^a(R_{siaj} + R_{sjai} + g_{sa}R_{ij} - g_{sj}R_{ia} + g_{sa}R_{ji} - g_{si}R_{ja}) + \nabla_i A_{sj} + \nabla_j A_{si} = 0 \tag{70}$$

elde edilir. Burada $B_i = g_{im}B^m$ ve $A_{sj} = g_{hj}A_s^h$ şeklindedir. Dolayısıyla (69) eşitliğinden

$$L_B g_{ij} = 2(n-3)R_{ij}$$

olur.

(69) ifadesi (67) deki (i) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$E_{\overline{i}}\left(v^{\overline{h}}\right)g_{hj} + \left(\nabla_j v^h\right)g_{hi} = 2\lambda g_{ij}$$

$$\Rightarrow \partial_{\bar{i}}(y^s A_s^h + B^h) g_{hj} + (\nabla_j v^h) g_{hi} = 2\lambda g_{ij}$$
$$\Rightarrow A_i^h g_{hj} + (\nabla_j v^h) g_{hi} = 2\lambda g_{ij}$$

olmak üzere

$$g_{hj} A_i^h = 2\lambda g_{ij} - g_{hi}(\nabla_j v^h) \tag{71}$$

elde edilir.

Önerme 10: M üzerinde bileşenleri (v^h) olan V vektör alanının, ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre projektif bir vektör alanı belirtmesi için

$$\left(2\delta_a^m R_{ij} - R_{ia}\delta_j^m - R_{ja}\delta_i^m\right) = 0$$

olmalıdır.

İspat: (71) eşitliğinin her iki tarafının ∇_k kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} g_{hj}(\nabla_k A_i^h) &= \nabla_k\left[2\lambda g_{ij} - g_{hi}(\nabla_j v^h)\right] \\ &= 2(\nabla_k \lambda) g_{ij} - g_{hi}\nabla_k \nabla_j v^h \\ &= 2\lambda_k g_{ij} - g_{hi}\left(L_V \Gamma_{kj}^h - R_{akj}{}^h v^a\right) \end{aligned}$$

$$\nabla_k A_{ij} = 2\lambda_k g_{ij} - L_V \Gamma_{kj}^h g_{hi} - R_{akij} v^a \tag{72}$$

olur. (72) ifadesi (70) de yerine yazıldığında

$$v^a(R_{siaj} + R_{sjai} + g_{sa}R_{ij} - g_{sj}R_{ia} + g_{sa}R_{ji} - g_{si}R_{ja}) + \nabla_i A_{sj} + \nabla_j A_{si} = 0$$
$$\Rightarrow \begin{matrix} v^a(R_{siaj} + R_{sjai} + g_{sa}R_{ij} - g_{sj}R_{ia} + g_{sa}R_{ji} - g_{si}R_{ja}) \\ +2\lambda_i g_{sj} - (L_V \Gamma_{ij}^h) g_{hs} - R_{aisj} v^a + 2\lambda_j g_{si} - (L_V \Gamma_{ji}^h) g_{hs} - R_{ajsi} v^a \end{matrix} = 0$$
$$\Rightarrow 2(L_V \Gamma_{ij}^h) g_{hs} = 2(\lambda_i g_{sj} + \lambda_j g_{si}) + v^a(g_{sa}R_{ij} - g_{sj}R_{ia} + g_{sa}R_{ji} - g_{si}R_{ja})$$

yazılır. Son eşitlik g^{sm} ile kontraksiyon yapılırsa

$$\Rightarrow L_V \Gamma_{ij}^m = \lambda_i \delta_j^m + \lambda_j \delta_i^m + \frac{1}{2} v^a\left(2\delta_a^m R_{ij} - R_{ia}\delta_j^m - R_{ja}\delta_i^m\right)$$

elde edilir. Burada $\lambda_i = \nabla_i \lambda$ dir. Dolayısıyla V vektör alanının, M üzerinde ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre projektif bir vektör alanı olması için

$$\left(2\delta_a^m R_{ij} - R_{ia}\delta_j^m - R_{ja}\delta_i^m\right) = 0$$

olmalıdır.

Teorem 24: $\tilde{V} = v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$, $(TM, \tilde{g})$ de adapte olmuş çatıya göre bir vektör alanı olsun. Bu durumda $(TM, \tilde{g}, \tilde{V}, \lambda)$ yapısı ancak ve ancak aşağıdaki koşullar sağlanırsa bir Ricci soliton belirtir:

i) λ yalnızca (x^h) değişkenine bağlıdır,

ii) (v^h) bileşenine sahip V vektör alanı M üzerinde infinitesimal bir projektif dönüşümdür,

iii) $v^{\overline{h}} = y^a A_a^h + B^h$,

iv) $A_{ij} = 2\lambda g_{ij} - \nabla_j v_i$,

v) $L_B g_{ij} = 2(n-3)R_{ij}$.

İspat: Önerme 8, Önerme 9, Önerme 10 ve daha önce elde edilen bulgular teoremin ispatını tamamlamaktadır.

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyonuna Göre Gradyan Ricci Soliton Yapısı

V potansiyel vektör alanı, M üzerindeki düzgün bir f fonksiyonunun gradyanı ise yani $V = \nabla f$ ise (M, g, V, λ) Ricci solitonuna, gradyan Ricci soliton denir ve (M, g, f, λ) şeklinde gösterilir. Burada f fonksiyonu solitonun potansiyel fonksiyonu olarak adlandırılır ve (13) denklemi

$$Hessf + Ric = \lambda g \tag{73}$$

olarak yazılır. Burada ∇f, f fonksiyonunun gradyanını ve $Hessf$ ise f fonksiyonunun Hessian'ını belirtir. Genellikle M üzerindeki X ve Y vektör alanları için ∇ konneksiyonuna göre herhangi bir f fonksiyonu için $Hessf$ şu şekilde ifade edilir:

$$(Hess_{\nabla} f)(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f.$$

Lemma 6: (M, g) Riemann manifoldu üzerinde f bir düzgün fonksiyon olmak üzere, bu f fonksiyonunun $(TM, \tilde{g})$ üzerinde dikey liftinin Hessian'ı $Hessf$, $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre:

$$\begin{aligned}
Hess_{\overline{\nabla}}{}^V f({}^H X, {}^H Y) &= {}^H X {}^H Y {}^V f - (\overline{\nabla}_{{}^H X} {}^H Y)^V f, \\
Hess_{\overline{\nabla}}{}^V f(E_i, E_j) &= E_i E_j{}^V f - (\overline{\nabla}_{E_i} E_j)^V f \\
&= (\partial_i - y^s \Gamma_{si}^h \partial_{\overline{h}})(\partial_j - y^m \Gamma_{mj}^l \partial_{\overline{l}})f \\
&\quad -[\Gamma_{ij}^h E_h + (y^s R_{sij}{}^h + y_j R_i^h - y^h R_{ij})E_{\overline{h}}]^V f \\
&= (\partial_i - y^s \Gamma_{si}^h \partial_{\overline{h}})(\partial_j f) - \Gamma_{ij}^h(\partial_h - y^s \Gamma_{sh}^m \partial_{\overline{m}})f \\
&= \partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^h \partial_h f \\
&= \nabla_i \nabla_j f,
\end{aligned} \tag{74}$$

$$
\begin{aligned}
Hess_{\overline{\nabla}}{}^{V}f({}^{V}X,{}^{V}Y) &= {}^{V}X^{V}Y^{V}f - (\overline{\nabla}_{{}^{V}X}{}^{V}Y)^{V}f,\\
Hess_{\overline{\nabla}}{}^{V}f(E_{\bar{i}},E_{\bar{j}}) &= E_{\bar{i}}E_{\bar{j}}{}^{V}f - (\overline{\nabla}_{E_{\bar{i}}}E_{\bar{j}})^{V}f\\
&= 0,
\end{aligned} \tag{75}
$$

$$
\begin{aligned}
Hess_{\overline{\nabla}}{}^{V}f({}^{H}X,{}^{V}Y) &= {}^{H}X^{V}Y^{V}f - (\overline{\nabla}_{{}^{H}X}{}^{V}Y)^{V}f,\\
Hess_{\overline{\nabla}}{}^{V}f(E_{i},E_{\bar{j}}) &= E_{i}E_{\bar{j}}{}^{V}f - (\overline{\nabla}_{E_{i}}E_{\bar{j}})^{V}f\\
&= -(\Gamma_{i\bar{j}}^{h}E_{h} + \Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{h}}E_{\bar{h}})^{V}f\\
&= 0,
\end{aligned} \tag{76}
$$

$$
\begin{aligned}
Hess_{\overline{\nabla}}{}^{V}f({}^{V}X,{}^{H}Y) &= {}^{V}X^{H}Y^{V}f - (\overline{\nabla}_{{}^{V}X}{}^{H}Y)^{V}f,\\
Hess_{\overline{\nabla}}{}^{V}f(E_{\bar{i}},E_{j}) &= E_{\bar{i}}E_{j}{}^{V}f - (\overline{\nabla}_{E_{\bar{i}}}E_{j})^{V}f\\
&= \partial_{\bar{i}}(\partial_{j} - y^{s}\Gamma_{sj}^{h}\partial_{\bar{h}})^{V}f\\
&= \partial_{\bar{i}}\partial_{j}f\\
&= 0
\end{aligned} \tag{77}
$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 25: (M,g) bir pseudo- Riemann manifoldu ve $(TM,\tilde{g})$ de onun tam lift metriği ile donatılmış tanjant demeti olsun. M üzerinde herhangi bir f fonksiyonu için $(TM,\tilde{g},{}^{H}V,{}^{V}f)$ yapısının $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir gradyan Ricci soliton belirtmesi ancak ve ancak $n\neq 3$ için Ricci tensörünün, ∇ Levi-Civita konneksiyonu aracılığıyla elde edilen Hessian metriğine eşit olması ile mümkündür.

İspat: (75)-(77) eşitlikleri ve (34) te verilen bileşenler (73) denkleminde kullanılırsa

$$\nabla_{i}\nabla_{j}f = (n-3)R_{ij}$$

elde edilir, bu ise ispatı tamamlar.

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyona Göre Genelleştirilmiş Ricci-Yamabe Soliton Yapısı

Teorem 26: (M,g) bir pseudo-Riemannian manifold ve $(TM,\tilde{g})$ onun tanjant demeti olsun. $(TM,\tilde{g},\ \tilde{V},\ \lambda)$ yapısının $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton belirtmesi için ancak ve ancak

i) ${}^{C}V = (v^{a},v^{\bar{a}}) = (v^{a},y^{s}\nabla_{s}v^{a})$,

ii) $\lambda = \frac{1}{n}\left[\nabla_{h}v^{h} - \gamma\left(y^{s}\nabla_{s}v_{j}\right)v^{j}\right]$,

iii) $R_{ij} = 0$,

iv) $\nabla_s \nabla_i v^i = 0$,

v) $(\nabla_s v_i)(\nabla_t v_j) = 0$

şartları sağlanmalıdır. Burada $\tilde{V}$ potansiyel vektör alanı, M üzerindeki V vektör alanının TM tanjant demete tam lifti olan ${}^{C}V$ dir.

İspat: λ nın varlığını göstermek için Tanım 49'dan,

$$L_{\tilde{V}} \tilde{g}_{\varepsilon\beta} + 2\alpha \tilde{R}_{\varepsilon\beta} = (2\lambda - \rho\tau)\tilde{g}_{\varepsilon\beta} + 2\gamma(V^{\#} \otimes V^{\#})_{\varepsilon\beta} \tag{78}$$

yazılır. (78) denkleminde $(\varepsilon, \beta) = (\bar{i}, j)$ olarak alınırsa

$$L_{\tilde{V}} \tilde{g}_{\bar{i}j} + 2\alpha \tilde{R}_{\bar{i}j} = (2\lambda - \rho\tau)\tilde{g}_{\bar{i}j} + 2\gamma(V^{\#} \otimes V^{\#})_{\bar{i}j}$$

olmak üzere (34) ve (38) den

$$\left(E_{\bar{i}} v^{\bar{h}}\right) g_{hj} + (\nabla_j v^h) g_{hi} = 2\lambda g_{ij} + 2\gamma(V^{\#} \otimes V^{\#})_{\bar{i}j} \tag{79}$$

olur. Burada potansiyel vektör alanı olan ${}^{C}V$,

$${}^{C}V = \begin{pmatrix} v^m \\ v^{\bar{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^j \\ y^s \nabla_s v^j \end{pmatrix} \tag{80}$$

ve ${}^{C}V$ nin duali $V^{\#}$,

$$V^{\#}_j = V^I \tilde{g}_{Ij} = v^i \tilde{g}_{ij} + v^{\bar{i}} g_{\bar{i}j} = v^i.0 + \ y^s \nabla_s v^i g_{ij} = y^s \nabla_s v_j,$$

$$V^{\#}_{\bar{j}} = V^I \tilde{g}_{I\bar{j}} = v^i \tilde{g}_{i\bar{j}} + v^{\bar{i}} g_{\bar{i}\bar{j}} = v^i g_{ij} + 0 = v_j$$

olmak üzere

$$\left(V^{\#}\right) = \begin{pmatrix} y^s \nabla_s v_j \\ v_j \end{pmatrix} \tag{81}$$

şeklindedir. (80) ve (81) ifadeleri (79) eşitliğinde kullanılırsa

$$E_{\bar{i}}(y^s \nabla_s v^h) g_{hj} + \left(\nabla_j v^h\right) g_{hi} = 2\lambda g_{ij} + 2\gamma\left(y^s \nabla_s v_j\right) v_i$$

olmak üzere

$$\delta_i^s (\nabla_s v^h) g_{hj} + \left(\nabla_j v^h\right) g_{hi} = 2\lambda g_{ij} + 2\gamma\left(y^s \nabla_s v_j\right) v_i$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafı g^{ij} ile kontraksiyon yapılırsa

$$\lambda = \frac{1}{n}[\nabla_h v^h - \gamma(y^s \nabla_s v_j) v^j]$$

bulunur.

Ayrıca (78) denkleminde $(\varepsilon,\beta)=(i,j)$ olarak alınırsa

$$L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{ij}+2\alpha\tilde{R}_{ij}=(2\lambda-\rho\tau)\tilde{g}_{ij}+2\gamma(V^{\#}\otimes V^{\#})_{ij}$$

yazılır. Son eşitlikte (34) ve (38) deki değerler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\left[E_i v^{\bar{h}}+\left(y^s R_{sia}{}^{h}+y_a R_i^h-y^h R_{ia}\right)v^a+\Gamma_{ia}^{\ h}v^{\bar{a}}\right]g_{hj}\\&+\left[E_j v^{\bar{h}}+\left(y^s R_{sja}{}^{h}+y_a R_j^h-y^h R_{ja}\right)v^a+\Gamma_{ja}^{\ h}v^{\bar{a}}\right]g_{hi}\\&+2\alpha(3-n)R_{ij}=2\gamma(y^s\nabla_s v_i)\left(y^t\nabla_t v_j\right)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&\left[y^s\nabla_i\nabla_s v^h+\left(y^s R_{sia}{}^{h}+y_a R_i^h-y^h R_{ia}\right)v^a\right]g_{hj}\\&+\left[y^s\nabla_j\nabla_s v^h+\left(y^s R_{sja}{}^{h}+y_a R_j^h-y^h R_{ja}\right)v^a\right]g_{hi}\\&+2\alpha(3-n)R_{ij}=2\gamma y^s y^t(\nabla_s v_i)(\nabla_t v_j)\end{aligned}$$

olur. Son denklemden

$$n\neq 3,\ R_{ij}=0, \tag{82}$$

$$(\nabla_s v_i)(\nabla_t v_j)=0,$$

ve

$$(\nabla_i\nabla_s v^h+R_{sia}{}^{h}v^a)g_{hj}+(\nabla_j\nabla_s v^h+R_{sja}{}^{h}v^a)g_{hi}=0$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı g^{ij} ile kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned}&(\nabla_i\nabla_s v^h+R_{sia}{}^{h}v^a)\delta_h^i+(\nabla_j\nabla_s v^h+R_{sja}{}^{h}v^a)\delta_h^j=0\\&\Rightarrow \nabla_s\nabla_i v^i+R_{sia}{}^{i}v^a+\nabla_s\nabla_j v^j+R_{sja}{}^{j}v^a=0\\&\Rightarrow \nabla_s\nabla_i v^i-R_{isa}{}^{i}v^a+\nabla_s\nabla_j v^j-R_{jsa}{}^{j}v^a=0\\&\Rightarrow \nabla_s\nabla_i v^i-R_{sa}v^a+\nabla_s\nabla_i v^i-\mathrm{R}_{\mathrm{sa}}v^a=0\\&\Rightarrow 2\nabla_s\nabla_i v^i-2R_{sa}v^a=0\end{aligned}$$

olup (82) den $R_{sa}=0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\nabla_s\nabla_i v^i=0$$

elde edilir.

Yukarıdaki hesaplamaları tersine yaptığımızda teoremin yeterliliği kolaylıkla görülür.

Teorem 27: (M,g) bir pseudo-Riemannian manifoldu ve TM onun tanjant demeti olsun. $(TM,\tilde{g},\ \tilde{V},\ \lambda)$ yapısının $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton belirtmesi için ancak ve ancak

i) ${}^{V}V = (v^{a}, v^{\bar{a}}) = (0, v^{a})$,

ii) $\lambda = 0$,

iii) $(L_{V}g)_{ij} = 2[\gamma v_{i} v_{j} - \alpha(3-n)R_{ij}]$

şartları sağlanmalıdır. Burada $\tilde{V}$ potansiyel vektör alanı, M üzerindeki V vektör alanının TM tanjant demete dikey lifti olan ${}^{V}V$ dir.

İspat: Tanım 49'daki (14) eşitliğinden

$$L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{\varepsilon\beta} + 2\alpha\tilde{R}_{\varepsilon\beta} = (2\lambda - \rho\tau)\tilde{g}_{\varepsilon\beta} + 2\gamma(V^{\#} \otimes V^{\#})_{\varepsilon\beta} \tag{83}$$

yazılır. Üstteki eşitlikte $(\varepsilon, \beta) = (\bar{i}, j)$ olarak alınırsa

$$L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{\bar{i}j} + 2\alpha\tilde{R}_{\bar{i}j} = (2\lambda - \rho\tau)\tilde{g}_{\bar{i}j} + 2\gamma(V^{\#} \otimes V^{\#})_{\bar{i}j}$$

olup son eşitlikte (34) ve (38) deki değerler yerlerine konulursa

$$\left(E_{\bar{i}}v^{\bar{h}}\right) g_{hj} + \left(\nabla_{j} v^{h}\right) g_{hi} = 2\lambda g_{ij} + 2\gamma(V^{\#} \otimes V^{\#})_{\bar{i}j} \tag{84}$$

yazılır. Burada potansiyel vektör alanı ${}^{V}V$,

$${}^{V}V = \begin{pmatrix} v^{m} \\ v^{\bar{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v^{m} \end{pmatrix} \tag{85}$$

ve ${}^{V}V$ nin duali $V^{\#}$

$$V_{j}^{\#} = V^{I}\tilde{g}_{Ij} = v^{i}\tilde{g}_{ij} + v^{\bar{\imath}}g_{\bar{\imath}j} = 0 + \ v^{i}g_{ij} = v_{j},$$

$$V_{\bar{j}}^{\#} = V^{I}\tilde{g}_{I\bar{j}} = v^{i}\tilde{g}_{i\bar{j}} + v^{\bar{\imath}}g_{\bar{\imath}\bar{j}} = 0 + 0 = 0$$

olmak üzere

$$(V^{\#}) = \begin{pmatrix} v_{j} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{86}$$

şeklindedir. (85) ve (86) denklemleri (84) de kullanılırsa

$$0 = 2\lambda g_{ij} + 2\gamma.0,$$

$$\lambda = 0$$

bulunur. $\lambda = 0$ olması solitonun sabit olduğunu göstermektedir.

Ayrıca (83) denkleminde $(\varepsilon, \beta) = (i, j)$ olduğu dikkate alınırsa

$$L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{ij} + 2\alpha\tilde{R}_{ij} = (2\lambda - \rho\tau)\tilde{g}_{ij} + 2\gamma(V^{\#} \otimes V^{\#})_{ij}$$

olup son eşitlikte (34) ve (38) deki değerler yerlerine yazılırsa

$$\Big[E_i v^{\bar{h}} + \big(y^s R_{sia}{}^h + y_a R_i^h - y^h R_{ia}\big)v^a + \Gamma_{ia}^{\,h} v^{\bar{a}}\Big] g_{hj}$$
$$+\Big[E_j v^{\bar{h}} + \big(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja}\big)v^a + \Gamma_{ja}^{\,h} v^{\bar{a}}\Big] g_{hi}$$
$$+2\alpha(3-n)R_{ij} = 2\gamma v_i v_j,$$

olmak üzere

$$[E_i v^h + \Gamma_{ia}^{\,h} v^a]g_{hj} + [E_j v^h + \Gamma_{ja}^{\,h} v^a]g_{hi} + 2\alpha(3-n)R_{ij} = 2\gamma v_i v_j$$

olur. Yukarıdaki denklemden

$$\nabla_i v_j + \nabla_j v_i + 2\alpha(3-n)R_{ij} = 2\gamma v_i v_j$$

olmak üzere

$$(L_V g)_{ij} = 2[\gamma v_i v_j - \alpha(3-n)R_{ij}]$$

elde edilir.

Yukarıdaki hesaplamalar tersten yapılırsa teoremin yeterliliği kolayca görülür.

Teorem 28: (M, g) bir pseudo-Riemannian manifoldu ve TM onun tanjant demeti olsun. $(TM, \tilde{g}, \tilde{V}, \lambda)$ yapısının $\bar{\tilde{\nabla}}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton belirtmesi için ancak ve ancak

i) ${}^H V = (v^a, v^{\bar{a}}) = (v^a, 0)$,

ii) $\lambda = \frac{1}{2n}(\nabla_h v^h)$,

iii) $n \neq 3$ için $R_{ij} = 0$,

iv) $v^a(R_{siaj} + R_{sjai}) = 0$

şartları sağlanmalıdır. Burada $\tilde{V}$ potansiyel vektör alanı, M üzerindeki V vektör alanının TM tanjant demete yatay lifti olan ${}^H V$ dir.

İspat: Önce λ nın varlığı gösterilsin. Tanım 49'dan

$$L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{\varepsilon\beta} + 2\alpha\tilde{R}_{\varepsilon\beta} = (2\lambda - \rho\tau)\tilde{g}_{\varepsilon\beta} + 2\gamma(V^\# \otimes V^\#)_{\varepsilon\beta} \tag{87}$$

yazılır. (87) denkleminde $(\varepsilon, \beta) = (\bar{\imath}, j)$ olarak alınırsa

$$L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{\bar{\imath}j} + 2\alpha\tilde{R}_{\bar{\imath}j} = (2\lambda - \rho\tau)\tilde{g}_{\bar{\imath}j} + 2\gamma(V^\# \otimes V^\#)_{\bar{\imath}j}$$

olup (34) ve (38) deki değerler yerlerine yazılırsa

$$\left(E_{\bar{\imath}} v^{\bar{h}}\right) g_{hj} + (\nabla_j v^h) g_{hi} = 2\lambda g_{ij} + 2\gamma(V^\# \otimes V^\#)_{\bar{\imath}j} \tag{88}$$

olur. Burada potansiyel vektör alanı olarak ${}^{H}V$,

$$ {}^{H}V = \begin{pmatrix} v^{m} \\ v^{\overline{m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^{m} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{89} $$

ve ${}^{H}V$ nin duali $V^{\#}$,

$$ V_{j}^{\#} = V^{I}\tilde{g}_{Ij} = v^{i}\tilde{g}_{ij} + v^{\bar{\imath}}g_{\bar{\imath}j} = 0, $$

$$ V_{\bar{j}}^{\#} = V^{I}\tilde{g}_{I\bar{j}} = v^{i}\tilde{g}_{i\bar{j}} + v^{\bar{\imath}}g_{\bar{\imath}\bar{j}} = v^{i}g_{ij} + 0 = v_{j} $$

olmak üzere

$$ (V^{\#}) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{j} \end{pmatrix} \tag{90} $$

şeklindedir. (89) ve (90) denklemleri (88) de kullanılırsa

$$ \left(E_{\bar{\imath}}v^{h}\right)g_{hj} + \left(\nabla_{j}v^{h}\right)g_{hi} = 2\lambda g_{ij} + 2\gamma 0, $$

$$ \left(\nabla_{j}v^{h}\right)g_{hi} = 2\lambda g_{ij} $$

yazılır. Eşitliğin her iki tarafı g^{ij} ile kontraksiyon yapılırsa

$$ \lambda = \frac{1}{2n}(\nabla_{h}v^{h}) $$

bulunur. Ayrıca (87) denkleminde $(\varepsilon, \beta) = (i, j)$ olarak alınırsa

$$ L_{\tilde{V}}\tilde{g}_{ij} + 2\alpha\tilde{R}_{ij} = (2\lambda - \rho\tau)\tilde{g}_{\ ij} + 2\gamma(V^{\#} \otimes V^{\#})_{ij} $$

olup (34) ve (38) deki değerler yerlerine yazılırsa

$$ \begin{aligned} &\left[E_{i}v^{\bar{h}} + \left(y^{s}R_{sia}{}^{h} + y_{a}R_{i}^{h} - y^{h}R_{ia}\right)v^{a} + \Gamma_{ia}^{\ h}v^{\bar{a}}\right]g_{hj} \\ &+\left[E_{j}v^{\bar{h}} + \left(y^{s}R_{sja}{}^{h} + y_{a}R_{j}^{h} - y^{h}R_{ja}\right)v^{a} + \Gamma_{ja}^{\ h}v^{\bar{a}}\right]g_{hi} \\ &+2\alpha(3-n)R_{ij} = 2\gamma v_{i}v_{j}, \end{aligned} $$

olmak üzere

$$ \left[\left(y^{s}R_{sia}{}^{h} + y_{a}R_{i}^{h} - y^{h}R_{ia}\right)v^{a}\right]g_{hj} $$

$$ +\left[\left(y^{s}R_{sja}{}^{h} + y_{a}R_{j}^{h} - y^{h}R_{ja}\right)v^{a}\right]g_{hi} + 2\alpha(3-n)R_{ij} = 0 $$

olur. Yukarıdaki denklemden $n \neq 3$ için

$$ R_{ij} = 0 $$

ve

$$ v^{a}(R_{siaj} + R_{sjai}) = 0 $$

elde edilir.

Yukarıdaki hesaplamalar tersten yapılırsa teoremin yeterliliği kolaylıkla gösterilir.

Tanjant Demette Ricci Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyona Göre Riemann Soliton Yapısı

Hamilton-Ricci akışının doğal bir genellemesi aşağıdaki şekilde tanımlanan Riemann akışı kavramıdır:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t) = -2Riemg(t),\ \ G = \frac{1}{2}g \wedge g.$$

Burada $Riem$, Riemann eğrilik tensörünü ve $\wedge$, Kulkarni-Nomizu çarpımını temsil eder. $C, D \in \Im_2^0(M)$ olmak üzere Kulkarni-Nomizu çarpımı şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}(C \wedge D)(W,X,Y,Z) &= C(W,Z)D(X,Y) + C(X,Y)D(W,Z)\\ &\quad -C(W,Y)D(X,Z) - C(X,Z)D(W,Y).\end{aligned}$$

Lokal koordinatlarda bu çarpım şu şekilde ifade edilir:

$$C \wedge D = C_{il}D_{jk} + C_{jk}D_{il} - C_{ik}D_{jl} - C_{jl}D_{ik}.$$

Riemann solitonu kavramı Udrişte ve Hirica tarafından ileri sürülmüştür. (M,g) Riemann manifoldu üzerindeki düzgün bir X vektör alanı için,

$$Riem + \frac{1}{2}g \wedge L_X g = \lambda G \tag{91}$$

eşitliği sağlanıyorsa (M,g,X,λ) yapısına Riemann soliton denir (Udrişte and Hirica 2016). Burada L_X, X vektör alanı boyunca Lie türevi, λ bir sabit ve $Riem$, g nin Riemann eğrilik tensörüdür. Böyle bir X vektör alanına soliton potansiyeli denir. Bir Riemann solitonu $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ veya $\lambda < 0$ olmasına bağlı olarak büzülen, sabit veya genişleyen olarak sınıflandırılır. Ayrıca, Riemann eğrilik tensörü $Riem = R_{ijkl}$ ve $G = G_{ijkl} = g \wedge g = g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}$ şeklindedir.

Teorem 29: (M,g) bir pseudo-Riemann manifoldu ve $(TM,\tilde{g})$ de onun $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış tanjant demeti olsun. $(TM,\tilde{g},\tilde{V},\lambda)$ yapısı aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa bir Riemann soliton belirtir:

i) $\tilde{X} = \left(v^l, v^{\bar{l}}\right) = (v^l, y^a A_a^l + B^l)$,

ii) $\lambda = \frac{1}{n}\left(\nabla_h v^h + A_h^h\right)$,

iii) $\nabla_s R_{ijkl} = 0$.

Burada $\tilde{X} = v^a E_a + v^{\bar{a}} E_{\bar{a}}$, TM de bir fibre-preserving vektör alanı, $B = (B^l)$ ve $A = (A_s^h)$ sırasıyla M üzerinde (1,0) ve (1,1) tipli tensör alanları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ dir.

İspat: (91) denkleminden hareketle aşağıda verilen iki durum dikkate alınsın:

i) $\overline{R\iota em}_{ijkl} + \frac{1}{2}(\tilde{g})_{ij} \wedge (L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{kl} = \lambda \tilde{G}_{ijkl}$,

ii) $\overline{R\iota em}_{\bar{i}\bar{j}k\bar{l}} + \frac{1}{2}(\tilde{g})_{\bar{i}\bar{j}} \wedge (L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{k\bar{l}} = \lambda \tilde{G}_{\bar{i}\bar{j}k\bar{l}}$

Bu eşitlikler ispat için yeterli olacaktır, çünkü bunların dışındaki diğer bileşenler de bu denklemlerle aynı sonuçları vermektedir.

$\tilde{G} = \tilde{G}_{IJKL} = (\tilde{g})_{IL}(\tilde{g})_{JK} - (\tilde{g})_{IK}(\tilde{g})_{JL}$, olmak üzere kullanılacak olan Kulkarni-Nomizu çarpımları

$$\tilde{G}_{ij\bar{k}\bar{l}} = g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}, \quad \tilde{G}_{\bar{i}jk\bar{l}} = -g_{ik}g_{jl}, \quad \tilde{G}_{i\bar{j}k\bar{l}} = g_{il}g_{jk},$$
$$\tilde{G}_{\bar{i}\bar{j}kl} = g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}, \quad \tilde{G}_{\bar{i}j\bar{k}l} = g_{il}g_{jk}, \quad \tilde{G}_{i\bar{j}\bar{k}l} = -g_{ik}g_{jl},$$

şeklinde olup diğer bileşenler sıfırdır.

(33) te verilen (0,4) tipli eğrilik tensörünün bileşenleri $ii)$ eşitliğinde kullanılırsa

$$\underbrace{\overline{R\iota em}_{\bar{i}\bar{j}k\bar{l}}}_{0} + \frac{1}{2}(\tilde{g})_{\bar{i}\bar{j}} \wedge (L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{k\bar{l}} = \lambda \tilde{G}_{\bar{i}\bar{j}k\bar{l}}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2}[\underbrace{(\tilde{g})_{\bar{i}\bar{l}}}_{g_{il}}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{\bar{j}k} + \underbrace{(\tilde{g})_{\bar{j}k}}_{g_{jk}}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{\bar{i}\bar{l}} - \underbrace{(\tilde{g})_{\bar{i}k}}_{0}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{\bar{j}\bar{l}} - \underbrace{(\tilde{g})_{\bar{j}\bar{l}}}_{0}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{\bar{i}k}] = \lambda g_{il}g_{jk},$$

$$g_{il}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{\bar{j}k} + g_{jk}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{\bar{i}\bar{l}}] = 2\lambda g_{il}g_{jk}$$

yazılır. Eşitliğin her iki tarafı g^{ij} ile kontraksiyon yapılırsa

$$\delta_j^l(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{\bar{j}k} + \delta_k^i(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{\bar{i}\bar{l}} = 2\lambda\delta_l^j g_{jk}$$

elde edilir. Son eşitlikte (38) deki $(L_{\tilde{X}}\tilde{g})$ ifadesi yerine yazıldığında

$$\delta_j^l[(E_{\bar{j}}v^{\bar{h}})g_{hk} + (\nabla_k v^h)g_{hj}] + \delta_k^i[(E_{\bar{l}}v^{\bar{h}})g_{hi} + (\nabla_i v^h)g_{hl}] = 2\lambda g_{lk}$$

olur. Her iki taraf g^{lk} ile tekrar kontraksiyon yapılırsa

$$\delta_j^l[(E_{\bar{j}}v^{\bar{h}})\delta_h^l + (\nabla_k v^h)g_{hj}g^{lk}] + \delta_k^i[(E_{\bar{l}}v^{\bar{h}})g_{hi}g^{lk} + (\nabla_i v^h)\delta_h^k] = 2\lambda n$$

bulunur. Buradan

$$2(E_{\bar{h}}v^{\bar{h}} + \nabla_h v^h) = 2\lambda n$$

olmak üzere

$$\lambda = \frac{1}{n}\left(E_{\overline{h}}v^{\overline{h}} + \nabla_h v^h\right) \tag{92}$$

elde edilir. (92) denkleminin her iki tarafına $E_{\overline{k}}$ uygulandığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$v^{\overline{l}} = y^a A_a^l + B^l. \tag{93}$$

(93) ifadesi (92) de yerine konulduğunda

$$\lambda = \frac{1}{n}\left(A_h^h + \nabla_h v^h\right)$$

olur. Ayrıca (33) te verilen $(0,4)$ tipli eğrilik tensörünün bileşenleri *i*) eşitliğinde kullanılırsa

$$y^s \nabla_s R_{ijkl} + \frac{1}{2}\left[\underbrace{(\tilde{g})_{il}}_{0}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{jk} + \underbrace{(\tilde{g})_{jk}}_{0}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{il} - \underbrace{(\tilde{g})_{ik}}_{0}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{jl} - \underbrace{(\tilde{g})_{jl}}_{0}(L_{\tilde{X}}\tilde{g})_{ik}\right] = 0$$

olmak üzere

$$\nabla_s R_{ijkl} = 0$$

elde edilir. Bu ise M baz manifoldunun lokal simetrik bir manifold olduğunu gösterir. Elde edilen bu sonuçlardan yola çıkılarak teoremin gerekliliğinin ispatı tamamlanır. Teoremin yeterliliği, yukarıdaki hesaplamalar tersine çevrilerek kolayca gösterilebilir.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında, öncelikle TM de adapte olmuş çatıya göre kovaryant ve kontravaryant bileşenleri sırasıyla,

$$(\tilde{g}_{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } (\tilde{g}^{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olan $\tilde{g}$ tam lift (*II*) metriği ve

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}(E_\gamma \tilde{g}_{\varepsilon\beta} + E_\beta \tilde{g}_{\gamma\varepsilon} - E_\varepsilon \tilde{g}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}({\Omega_{\gamma\beta}}^{\alpha} + {\Omega^{\alpha}}_{\gamma\beta} + {\Omega^{\alpha}}_{\beta\gamma})$$

eşitliği kullanılarak $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonuna ait katsayılar hesaplanmıştır.

Elde edilen bu katsayılar ($\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$) yardımıyla,

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} + U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$$

şartını sağlayan, $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonunun katsayılarını $\left(\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}\right)$ elde etmek için önce $(1,2)$ tipli $U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ tensörleri belirlenmiştir. $U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ tensörleri belirlenirken $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun,

$$\bar{\nabla}_k \tilde{g}_{\alpha\beta} = 0$$

metrik olma özelliği kullanılarak $(0,3)$ tipli $U_{\alpha\beta\gamma}$ tensörlerinin son iki indise göre antisimetrik ($U_{k\alpha\beta} = -U_{k\beta\alpha}$) olduğu gösterilmiştir.

$\tilde{\nabla}$ ve $\bar{\nabla}$ konneksiyonlarına ait katsayılar

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} + U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$$

ve burulma tensörleri

$$\bar{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \underbrace{\tilde{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}}_{0} + U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} - U_{\beta\alpha}^{\ \ \gamma}$$

arasındaki ilişki dikkate alınarak

$$\bar{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} - U_{\beta\alpha}^{\ \ \gamma}$$

olduğu bulunmuştur. Buradan hareketle $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun $\bar{T}$ burulma tensörü ile $(0,3)$ tipli $U_{\alpha\beta\gamma}$ tensörlerinin arasında

$$\bar{T}_{\alpha\beta\gamma} + \bar{T}_{\gamma\alpha\beta} + \bar{T}_{\gamma\beta\alpha} = 2U_{\alpha\beta\gamma}$$

ilişkisinin var olduğu belirlenmiştir. $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun Ricci quarter-simetrik olması için $\bar{T}$ burulma tensörü,

$$\bar{T}_{ij}{}^{\bar{k}} = y_j R_i^k - y_i R_j^k$$

olarak alınmış ve akabinde $(0,3)$ tipli $\bar{T}_{\alpha\beta\gamma}$ burulma tensörleri bulunmuştur. Elde edilen bu $\bar{T}_{\alpha\beta\gamma}$ tensörleri ile $U_{\alpha\beta\gamma}$ tensörleri arasındaki

$$\bar{T}_{\alpha\beta\gamma} + \bar{T}_{\gamma\alpha\beta} + \bar{T}_{\gamma\beta\alpha} = 2U_{\alpha\beta\gamma}$$

ilişkisi dikkate alınarak $(1,2)$ tipli $U_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ tensörleri elde edilmiştir. $U_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ tensörleri

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + U_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$$

eşitliğinde kullanılarak $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun katsayıları $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ hesaplanmıştır. Hesaplanan bu konneksiyon katsayıları yardımıyla TM tanjant demette bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon

$$\begin{cases} \bar{\nabla}_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k + \left\{ y^s R_{sij}{}^{k} + y_j R_i^k - y^k R_{ij} \right\} E_{\bar{k}}, \\ \bar{\nabla}_{E_i} E_{\bar{j}} = \Gamma_{ij}^k E_{\bar{k}}, \\ \bar{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_j = 0, \\ \bar{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_{\bar{j}} = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

TM tanjant demet üzerinde adapte olmuş çatıya göre kovaryant bileşenleri

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $I+II$ $(\hat{g})$ metriği dikkate alınarak $\tilde{g}$ tam lift metriğine göre tanımlanan $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun aynı zamanda $\hat{g}$ metriğine göre de bir Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon belirttiği gösterilmiştir.

Tanımlanan $\bar{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonunun $(1,3)$ tipli $\bar{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} = E_\alpha \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\sigma} - E_\beta \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\sigma} + \bar{\Gamma}_{\alpha\varepsilon}^{\sigma} \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\varepsilon} - \bar{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^{\sigma} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\varepsilon} - \Omega_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}^{\sigma}$$

eşitliği kullanılarak

1) $\overline{R}(E_i, E_j)E_k = R_{ijk}{}^l E_l + \{y^s \nabla_s R_{ijk}{}^l\}E_{\bar{l}}$

2) $\overline{R}(E_i, E_j)E_{\bar{k}} = R_{ijk}{}^l E_{\bar{l}}$

3) $\overline{R}(E_i, E_{\bar{j}})E_k = \{R_{ijk}{}^l + R_{ik}\delta_j^l - g_{jk}R_i{}^l\}E_{\bar{l}}$

4) $\overline{R}(E_{\bar{i}}, E_j)E_k = \{R_{ijk}{}^l + g_{ik}R_j{}^l - R_{jk}\delta_i^l\}E_{\bar{l}}$

5) $\overline{R}(E_{\bar{i}}, E_{\bar{j}})E_k = 0$

6) $\overline{R}(E_{\bar{i}}, E_j)E_{\bar{k}} = 0$

7) $\overline{R}(E_i, E_{\bar{j}})E_{\bar{k}} = 0$

8) $\overline{R}(E_{\bar{i}}, E_{\bar{j}})E_{\bar{k}} = 0$

şeklinde bulunmuş ve akabinde $(0,4)$ tipli $\bar{R}$ eğrilik tensörünün ilk iki ve son iki indise göre antisimetrik olduğu elde edilmiştir.

Tam lift metriği $\tilde{g}$ ve I+II metriği $\hat{g}$ nin Levi-Civita konneksiyonları çakıştığından, Riemann eğrilik tensörlerinin de çakışacağı ifade edilmiştir. Ayrıca $\tilde{g}$ tam lift metriğinin (veya $\hat{g}$ metriğinin) Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensörü ile Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonunun eğrilik tensörünün çakışması için $R_{ik}\delta_j^l - g_{jk}R_i{}^l = 0$ olması gerektiği gösterilmiştir.

TM de $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonuna ait Ricci tensörünün bileşenleri hesaplanarak Ricci tensörünün simetrik olduğu bulunmuştur. Ayrıca, $(TM, \tilde{g})$ tanjant demetin $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre lokal Ricci simetrik olmasının ancak ve ancak (M, g) baz manifoldunun lokal Ricci simetrik olması ile mümkün olduğu gösterilmiştir.

Yine $(TM, \tilde{g})$ tanjant demetin $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre Ricci flat olmasının ancak ve ancak (M, g) Riemann manifoldunun Ricci flat olması ile mümkün olduğu kanıtlanmıştır.

$(TM, \tilde{g})$ tanjant demetin, tanımlanan $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre, Ricci semi-simetrik olmasının ancak ve ancak $n \neq 3$ için (M, g) nin Ricci semi-simetrik olması ile mümkün olduğu gösterilmiştir.

$\overline{\nabla}$ konneksiyonunun $\overline{\mathrm{K}}$ Ricci tensörü ile ilgili bir uygulama olarak TM tanjant demet üzerinde

$$\overline{Z}_{\alpha\beta} = \overline{K}_{\alpha\beta} + \phi\tilde{g}_{\alpha\beta}$$

şeklinde tanımlanan $(0,2)$ tipli genelleştirilmiş $\bar{Z}$ tensörünün simetrik olduğu gösterilmiştir.

TM de $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun skaler eğriliğinin sıfır olduğu hesaplanmıştır.

$\overline{\nabla}$ konneksiyonun $\overline{T}$ burulma tensörü ile ilgili bir uygulama olarak

$$\underset{\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}}{\sigma}\overline{T}\big(\overline{T}(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z}\big) = \overline{T}_{\alpha\beta}{}^{\epsilon}\,\overline{T}_{\epsilon\gamma}{}^{\sigma} + \overline{T}_{\gamma\alpha}{}^{\epsilon}\,\overline{T}_{\epsilon\beta}{}^{\sigma} + \overline{T}_{\beta\gamma}{}^{\epsilon}\,\overline{T}_{\epsilon\alpha}{}^{\sigma}$$

şeklinde tanımlanan döngüsel toplamın sıfır olduğu bulunmuştur.

$(TM, \tilde{g})$ de $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun $\hat{\nabla}$ ortalama konneksiyonu, konneksiyon katsayıları yardımıyla

$$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} = \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma} - \frac{1}{2}\overline{T}_{\alpha\beta}^{\ \gamma}$$

şeklinde hesaplanıp elde edilen $\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \gamma}$ konneksiyon katsayıları kullanılarak $\hat{\nabla}$ ortalama konneksiyon tanımlanmıştır. Tanımlanan bu $\hat{\nabla}$ ortalama konneksiyonun Ricci tensörü ile $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonun Ricci tensörünün çakıştığı gösterilmiştir.

$(TM, \tilde{g})$ de bazı özel vektör alanları (projektif, konformal, harmonik, concurrent, $\tilde{\varphi}(Ric)$, incompresible) tanımlanan bu $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma yapılırken ilk olarak lifte edilmiş vektör alanlarının incompressible ve harmonik olma durumları incelenerek;

i) $(TM, \tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^{V}V$ dikey liftinin $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre bir incompressible vektör alanı olduğu,

ii) $(TM, \tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^{H}V$ yatay lifti ve ${}^{C}V$ tam liftinin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir incompressible vektör alanı olmasının ancak ve ancak M de V vektör alanının Levi-Civita konneksiyonuna göre bir incompressible vektör alanı olması ile mümkün olduğu,

iii) $(TM, \tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^{V}V$ dikey liftinin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir harmonik vektör alanı olmasının ancak ve ancak V vektör alanının M de Levi-Civita konneksiyonuna göre bir harmonik vektör alanı olması ile mümkün olduğu,

iv) $(TM, \tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^{C}V$ tam liftinin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir harmonik vektör alanı olmasının ancak ve ancak V vektör alanının M de Levi-Civita konneksiyonuna göre bir harmonik vektör alanı olması ve $R_{siaj} - R_{sjai} + g_{si}R_{ja} - g_{sj}R_{ia} = 0$ şartının sağlanması ile mümkün olduğu,

v) $(TM, \tilde{g})$ de V vektör alanının ${}^{H}V$ yatay liftinin $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir harmonik vektör alanı olmasının ancak ve ancak V vektör alanının M de Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel olması ve $R_{siaj} - R_{sjai} + g_{si}R_{ja} - g_{sj}R_{ia} = 0$ şartının sağlanması ile mümkün olduğu gösterilmiştir.

Daha sonra $(TM, \tilde{g})$ de $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre concurrent (a), konformal (b), projektif (c) ve $\tilde{\varphi}(Ric)$(d) vektör alanları için genel ifadeler elde edilmiştir:

a) $(TM, \tilde{g})$ üzerinde

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} v^h \\ \frac{1}{n}[tr(\nabla V)]y^h \end{pmatrix}$$

formuna sahip bir $\tilde{V}$ vektör alanının

$$\frac{1}{n}\left[\nabla_j\big(tr(\nabla V)\big)y^h\right]+(y^s R_{sja}{}^h + y_a R_j^h - y^h R_{ja})v^h=0$$

şartı sağlanırsa $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir fibre-preserving concurrent vektör alanı olduğu,

b) TM üzerinde

$$\tilde{V} = v^h E_h + (y^s A_s^h + B^h)E_{\bar{h}}$$

şeklinde tanımlanan bir $\tilde{V}$ vektör alanının $A_i^h = g^{ha}A_{ai}$, $A_{ij} = 2\rho g_{ij} + \nabla_i v_j - L_V g_{ij}$, $g_{ji}B^j = B_i$ ve $\nabla_i B_j = L_B g_{ij} - \nabla_j B_i$ olmak üzere $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir fibre-preserving konformal vektör alanı belirttiği,

c) $(TM, \tilde{g})$ üzerinde

$$\tilde{V} = {}^H V + {}^V B + \gamma A,$$

formuna sahip bir $\tilde{V}$ vektör alanının,

i) $\bar{\theta} = \theta_i dx^i$

ii) $\nabla_i \theta_j = 0$

iii) $\nabla_j A_i^h = \theta_j \delta_i^h - v^c R_{cji}{}^h$

iv) $R_{aij}{}^h B^a = B^h R_{ij} - B_j R_i^h$

v) $L_V \Gamma_{ij}^h = \theta_i \delta_j^h + \theta_j \delta_i^h$

şartları sağlanırsa TM de $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyonuna göre bir fibre-preserving projektif vektör alanı belirttiği,

d) TM üzerinde

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^h(x^h) \\ \tilde{\varphi}^{\bar{h}}(x^h) \end{pmatrix}$$

formuna sahip bir $\tilde{\varphi}$ vektör alanının

i) $\nabla_i \tilde{\varphi}^h = 0,$

ii) $\nabla_i \tilde{\varphi}_{\bar{j}} = \lambda R_{ij}$,

iii) $({R_{sia}}^h + g_{sa} R_i^h - \delta_s^h R_{ia})\tilde{\varphi}^a = 0$

koşullarının sağlanması durumunda bir fibre-preserving $\tilde{\varphi}(Ric)$ vektör alanı belirttiği gösterilmiştir.

Son olarak ise TM tanjant demetin bu konneksiyona göre bir soliton yapısına (Ricci soliton (A), gradyan Ricci soliton (B), genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton (C), Riemann soliton (D)) sahip olması için gerekli ve yeterli koşullar elde edilmiştir:

A) $\tilde{V} = v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$, $(TM, \tilde{g})$ de adapte olmuş çatıya göre bir vektör alanı olmak üzere $(TM, \tilde{g}, \tilde{V}, \lambda)$ yapısının ancak ve ancak

i) λ yalnızca (x^h) değişkenine bağlı,

ii) (v^h) bileşenine sahip V vektör alanı M üzerinde infinitesimal bir projektif dönüşüm,

iii) $v^{\bar{h}} = y^a A_a^h + B^h$,

iv) $A_{ij} = 2\lambda g_{ij} - \nabla_j v_i$,

v) $L_B g_{ij} = 2(n-3)R_{ij}$

koşullarının sağlanması durumunda bir Ricci soliton belirttiği gösterilmiştir.

B) M üzerinde herhangi bir f fonksiyonu için $(TM, \tilde{g}, {}^H V, {}^V f)$ yapısının $\bar{\bar{\nabla}}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir gradyan Ricci soliton belirtmesinin ancak ve ancak $n \neq 3$ olacak şekilde

$$\nabla_i \nabla_j f = (n-3)R_{ij}$$

olması ile mümkün olduğu kanıtlanmıştır.

C) $(TM, \tilde{g})$ de, $\tilde{V}$ potansiyel vektör alanı sırasıyla ${}^C V$, ${}^H V$ ve ${}^H V$ olarak alınarak $(TM, \tilde{g}, \tilde{V}, \lambda)$ yapısının $\bar{\bar{\nabla}}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton belirtmesi için gerekli ve yeterli şartlar elde edilmiştir:

a) $(TM, \tilde{g},\ {}^C V,\ \lambda)$ yapısının $\bar{\bar{\nabla}}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton belirtmesi için ancak ve ancak

i) $\lambda = \frac{1}{n}\left[\nabla_h v^h - \gamma\left(y^s \nabla_s v_j\right) v^j\right]$,

ii) $R_{ij} = 0$,

iii) $\nabla_s \nabla_i v^i = 0$,

iv) $(\nabla_s v_i)(\nabla_t v_j) = 0$

şartlarının sağlanması gerektiği gösterilmiştir.

b) $(TM, \tilde{g},\ {}^{V}V,\ \lambda)$ yapısının $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton belirtmesi için ancak ve ancak

i) $\lambda = 0$,

ii) $(L_V g)_{ij} = 2[\gamma v_i v_j - \alpha(3-n)R_{ij}]$

şartlarının sağlanması gerektiği gösterilmiştir.

c) $(TM, \tilde{g},\ {}^{H}V,\ \lambda)$ yapısının $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyona göre bir genelleştirilmiş Ricci-Yamabe soliton belirtmesi için ancak ve ancak

i) $\lambda = \frac{1}{2n}(\nabla_h v^h)$,

ii) $n \neq 3$ için $R_{ij} = 0$,

iii) $v^a(R_{siaj} + R_{sjai}) = 0$

şartlarının sağlanması gerektiği gösterilmiştir.

D) (M, g) bir pseudo-Riemann manifoldu ve $(TM, \tilde{g}\ )$ de onun $\overline{\nabla}$ Ricci quarter-simetrik metrik konneksiyon ile donatılmış tanjant demeti olmak üzere $(TM, \tilde{g}, \tilde{V}, \lambda)$ yapısının

i) $\tilde{X} = \left(v^l, v^{\bar{l}}\right) = (v^l, y^a A_a^l + B^l)$,

ii) $\lambda = \frac{1}{n}\left(\nabla_h v^h + A_h^h\right)$,

iii) $\nabla_s R_{ijkl} = 0$

koşullarının sağlaması durumunda bir Riemann soliton belirttiği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Abbassi, M. T. K., 2004. Note on the classification theorems of g-natural metrics on the tangent bundle of a Riemannian manifold (M; g). Comment. Math. Univ. Carolin., 4(45), 591-596.

Abbassi, M.T.K and Sarih, M., 2005a. On Riemannian g-natural metrics of the form $a^{S}g + b^{H}g + c^{V}g$ on the tangent bundle of a Riemannian manifold (M,g). Mediterr. J. Math., 2 (1), 19-43.

Abbassi, M. T. K. and Sarih, M., 2005b. On some hereditary properties of Riemannian g natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds. Dif. Geo. and its App., 22, 19-47.

Altunbaş, M., 2014. Keyfi Tipli Tensör Demetlerinin Geometrisi. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Aso, K., 1980. Notes on some properties of the sectional curvature of the Tangent Bundle. Yokohama Math. J., 29, 1-5.

Bishop, R.L. and Goldberg, S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. First Dover 1980 Edition, The Macmillan Company, 292 p, London.

Brickell, F. and Yano, K., 1974. Concurrent vector fields and Minkowski Structures. Kodai Math. Sem. Rep., 26, 22-28.

Cheeger, J. and Gromoll D., 1972. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, Ann. of Math. 96(3), 413-443.

Demir, S., 2016. Öklidyen Olmayan Geometrilerin Oluşumu. Y. Lisans Tezi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul Üniversitesi.

Freeman, K., 2008. A historical overwiew of connections in geometry. Y. Lisans Tezi, Bachelor of Arts, Wichita State University.

Friedmann, A. and Schouten, J. A., 1924. Über die geometrie der halbsymmetrischen übertragung. Math. Zeitschr., 21, 211-223.

Gezer, A., Bilen, L., Karaman, Ç. and Altunbaş M., 2015. Curvature properties of Riemannian metric of the form ${}^{S}gf + {}^{H}g$ on the Tangent Bundle over a Riemannian manifold (M, g). IECG, 8(2), 181-194.

Gezer, A., Karakaş, E., 2024. Classification of vector fields and soliton structures on a tangent bundle with a Ricci quarter-symmetric metric connection. Int. Electron. J. Geom., 17(2), 358-377.

Golab, S., 1975. On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections. Tensor (N.S.), 29, 249–254.

Gudmundsson, S. and Kappos, E., 2002. On the geometry of tangent bundles. Exp. Math., 20, 1-41.

Hacısalihoğlu, H. H.,1998. Diferensiyel Geometri. Hacısalihoğlu Yayıncılık, 269 s, Ankara.

Hamilton, R.S., 1982. Three-manifolds with positive Ricci curvature. J. Differential Geom., 17, 255–306.

Hamilton, R.S., 1988. The Ricci flow on surfaces, mathematics and general relativity. Contemp. Math., 71, 237–262.

Hasegawa, I., Yamauchi, K., 2003. Infinitesimal projective transformations on tangent bundles with lift connections. Sci. Math. Jpn., 57 (1), 469–483.

Hayden, H.A.,1932. Subspace of space with torsion, Proc. London Math. Soc., 34, 27-50.

Hicks, N.J., 1971. Notes on Differential Geometry. Van Nostrand Reinhold Company, 183 p, New York.

Hinterleitner, I. and Kiosak, V.A., 2008. φ(Ric)-vector fields in Riemannian spaces. Arch. Math., 44, 385–390

Li, Y., Gezer, A., Karakaş, E., 2023. Some notes on the tangent bundle with a Ricci quarter-symmetric metric connection. AIMS Mathematics, 8 (8), 17335–17353.

Kamilya, D. and De, U. C., 1995. Some properties of a Ricci quarter-symmetric metric connection in a Riemannian manifold. Indian J. Pure Appl. Math., 26, 29–34.

Kobayashi, S. and Nomizu K., 1963. Foundations of Differential Geometry I. John Wiley&Sons, 329 p, New York, London.

Kowalski, O., 1971. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold. J. Reine Angew. Math., 250, 124-129.

Kowalski, O. and Sekizawa, M., 1988. Natural Transformations of Riemannian Metrics on Manifolds to Metrics on Tangent Bundles. Bull. Tokyo Gakugei Univ., 4(40), 1-29.

Kühnel, W., 2005. Differential Geometry curves-surfaces-manifolds. American Mathematical Society, 380 p, New York.

Musso, E. and Tricceri, F., 1988. Riemannian metrics on tangent bundles. Ann. Mat. Pura. Appl., 150 (4), 1-19.

Nomizu, K., 1986. On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor. Tohoku Math. J., 20, 46-59.

O' Neill B., 1983. Semi-Riemanian Geometry. Academic Press, 468 p, London.

O’Shea, D., 2017. Poincaré Sanısı. Tübitak Popüler Bilim Kitapları, 337 s, Ankara.

Özkan, M., 2006. Hiperyüzeylerin Vektör Demetlerine Taşınması. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Sabuncuoğlu, A., 2006. Diferensiyel Geomeri. Nobel Yayıncılık, 522 s, Ankara.

Salimov, A.A. ve Mağden, A., 2008. Diferensiyel Geometri. Aktif Yayınevi, 326 s, Erzurum.

Sasaki, S., 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 10, 338-358.

Szabo, Z., 1982. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying R(X, Y).R = 0, the local version. J. Differential Geometry, 17, 531-582.

Şahin, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geomerisi. Nobel Yayıncılık, 294 s, Ankara.

Şahin, B., 2015. Manifoldlar Teorisi. 13.Geometri Sempozyumu, İstanbul.

Şuhubi, E. S., 2008. Dış Form Analizi. TÜBA, 646 s, Ankara.

Udrişte, C., 2012. Riemann flow and Riemann wave via bialternate product Riemannian metric. https://arxiv.org/abs/1112.4279.

Udrişte, C. and Hirica, I. E., 2016. Ricci and Riemann solitons. Balkan J. Geom. Appl., 21(2), 35–44.

Yalçın, Ş., 2003. Kant'ta Matematiğin Felsefi Temelleri. Felsefe Dünyası, 1(37), 7-22.

Yamauchi, K., 1994. On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles over Riemannian manifolds. Ann. Rep. Asahikawa Med. Coll., 15, 1-10.

Yamauchi, K., 1998. On infinitesimal projective transformations of the tangent bundles with the complete lift metric over Riemannian manifolds. Ann. Rep. Asahikawa Med. Coll., 19, 49-55.

Yamauchi, K. and Hasegawa, I., 2002. Infinitesimal conformal transformations on tangent bundles with the lift metric I+II. Scientiae Mathematicae Japonicae Online, 7, 437-445.

Yano, K. and Imai, J., 1982. Quarter-symmetric connection and their curvature tensors. Tensor (N.S.), 38, 13–18.

Yano, K. and Ishihara S., 1967. Horizontal Lifts of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles. Jour. Math. and Mech., 16, 1015-1030.

Yano, K. and Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker, Inc., New York.

Yano, K. and Kobayashi S., 1966, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles I - General Theory-. J. Math. Soc. Japan, 18, 194-210.

Yano, K. and Kon M., 1984. Structures on Manifolds. World Scientific Publishing, 508 p, Singapore.

Wilkins, D.R., 2005. A Course in Riemanian Geometry. 72 p.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler
Adı Soyadı: Erkan KARAKAŞ **Doğum tarihi:** **Doğum Yeri:** **Uyruğu:** **Adres:** **Tel:** **E-mail:**
Eğitim
Lise: Erzurum Anadolu Lisesi **Lisans:** Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği **Yüksek lisans:** Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD **Doktora:** Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD
Yabancı Dil Bilgisi
İngilizce:
Üye Olunan Mesleki Kuruluşlar
-
Tezden Üretilmiş Yayınlar
1-) Li, Y., Gezer, A., Karakaş, E., 2023. Some notes on the tangent bundle with a Ricci quarter-symmetric metric connection. AIMS Mathematics, 8 (8), 17335–17353. (SCI-Exp. (Q1)) **2-)** Gezer, A., Karakaş, E., 2024. Classification of vector fields and soliton structures on a tangent bundle with a Ricci quarter-symmetric metric connection. Int. Electron. J. Geom., 17(2), 358-377. (ESCI-Exp.) **3-)** Li, Y., Gezer, A., Karakaş, E., 2024. Exploring Conformal Soliton Structures in Tangent Bundles with Ricci-Quarter Symmetric Metric Connections, Mathematics, 12(13), 2101. (SCI-Exp. (Q1))